Aus der linearen Algebra ist bekannt,
dass

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

Menge der stetigen Funktion in $[-1,1]$

ein Skalarprodukt in $C[-1,1]$ definiert.
Wenn $\langle f, g \rangle = 0$, so sind f und g orthogonal zueinander.
Also

Polynome!

$$\langle r(x), \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \rangle = 0$$

sagt uns wir suchen Orthogonalpolynome!
Dies führt uns zu den Legendre-Polynomen welche durch folgende Rekursions-formel gegeben sind

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1}\, x \cdot P_j(x) - \frac{j}{j+1} P_{j-1}(x), \quad j \geq 1$$