Untersuchen wir theoretisch die Schätzung 2, d.h. der Vergleich einer QR mit derselben QR aber mit halbierter Teil-Intervall Länge.

Betrachten wir hierzu ein Intervall $I = [a,b]$ und den QF einer QR der Ordnung s

$$\epsilon[f] = \left| Q[f] - I[f] \right| \leq \frac{\| f^{(s)} \|_\infty}{s!} (b-a)^{s+1} = K \cdot (b-a)^{s+1}$$

Dies nennt man einen a priori Fehler-Schätzer. Dieser ist natürlich nur brauchbar, wenn $\| f^{(s)} \|_\infty$ bzw. K bekannt ist (was i.A. natürlich nicht der Fall ist!).

Für den QF gilt also:

$$\epsilon^1[f] = | Q^1[f] - I[f] | = K \cdot (b-a)^{s+1}$$

$$\epsilon^2[f] = | Q^2[f] - I[f] | \approx K \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right)^{s+1} + K \left(\frac{b-a}{2} \right)^{s+1}$$

Fehler auf halben Teil-Int.

$$= \frac{K}{2^s} (b-a)^{s+1} = \frac{\epsilon^1[f]}{2^s}$$