Lösung 11

1. *Adaptive Schrittweitensteuerung*

a) Siehe `RKF45.m` und `adaptHeun.m`.

b) In Abb. 1 werden die erhaltene Schrittweitte h für die Heun (links) und RKF45 (rechts) Verfahren gezeigt (erstellt mit `vanDerPol.m`). Wir beobachten, dass

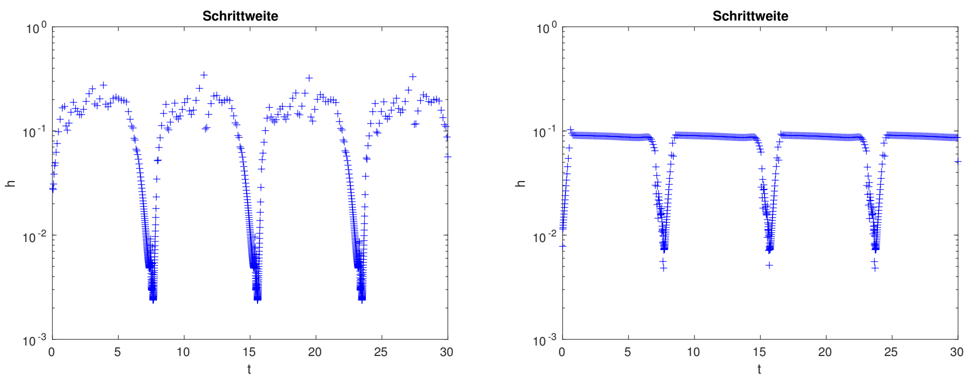

Abbildung 1 – Schrittweitte h für die Heun (links) und RKF45 (rechts) Verfahren.

wenn die Lösung anfängt stärker zu variieren (bei Zeit ~ 7) reduziert der Algorithmus die Schrittweite sukzessiv. Der Unterschied zwischen diesem Algorithmus und der einfacheren Versionen aus letzter Serie besteht darin, dass wenn die Lösung wieder weniger stark variiert wird die Schrittweite wieder vergrössert. Die erhaltene Approximationen sind in diesen Falle nicht schlechter, d.h. sie erfüllen unser lokales Toleranz-Kriterium, aber wir benutzen viel weniger Funktionsauswertungen. Deshalb können wir ähnliche Ergebnisse mit weninger Aufwand erhalten, d.h. wir sind effizienter!

2. *Mehrkörpersimulation*

Wir beobachten, dass die Schrittweiten kleiner werden, wenn die Körper näher sind.

3. *Fixpunkte*

Der Punkt x ist einen Fixpunkt für die Funktion ϕ falls $\phi(x) = x$. Wir erhalten dann

$$x = \phi(x) = 2x^3 - 7x \Leftrightarrow 0 = 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2\}.$$

4. *Fixpunktiteration*

a) Für die verschiedene Funktionen haben wir

- $x = \phi_1(x) = e^{-x} \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_2(x) = \frac{x^2e^x+1}{e^x(x+1)} \Leftrightarrow x^2e^x + xe^x = x(x+1)e^x = x^2e^x + 1 \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_3(x) = x + 1 - xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.

Deshalb sind alle drei Fixpunktfunktionen konsistent mit dem Nullstellenproblem.

b) Siehe `fixpunkt.m`.

c) Siehe `fixpunktproblem.m`. Wir sehen, dass der Algorithmus für ϕ_3 divergiert.