Lösung 5

1. *Explizites Eulerverfahren*

a) Man erhält das Richtungsfeld in Abb. 1.

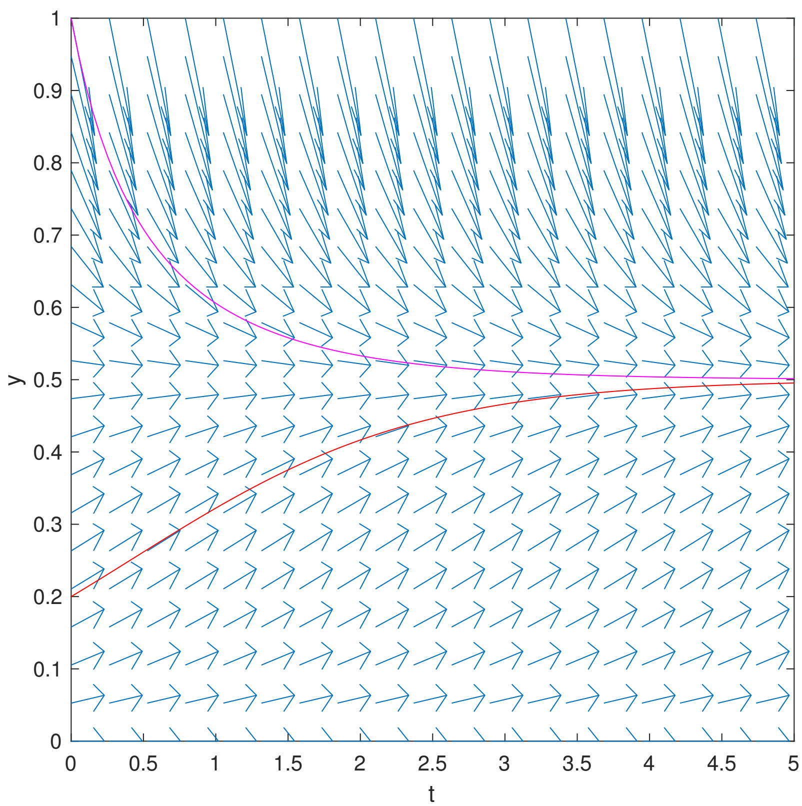

Abbildung 1 – Richtungsfeld der logistischen Diff.-Gl. und zwei mit dem Euler Verfahren numerisch berechneten Lösungen.

b) Siehe das kommentierte `expEuler.m`.

c) Die beiden numerisch berechneten Lösungen sind in Abb. 1 dargestellt.

d) Wir beobachten, dass in dem `log-log`-Plot ($\log(h)$ vs. $\log$(Abs. Fehler)) der absolute Fehler auf einer Geraden liegen (für $h \lesssim 0.1$). Dank dem Gitter erkennt man auch leicht, dass die Gerade ungefähr Steigung Eins hat. Also der absolute Fehler verhält sich wie $E_N = O(h^p)$ mit $p = 1$. Das explizite Euler Verfahren hat somit Ordnung Eins!

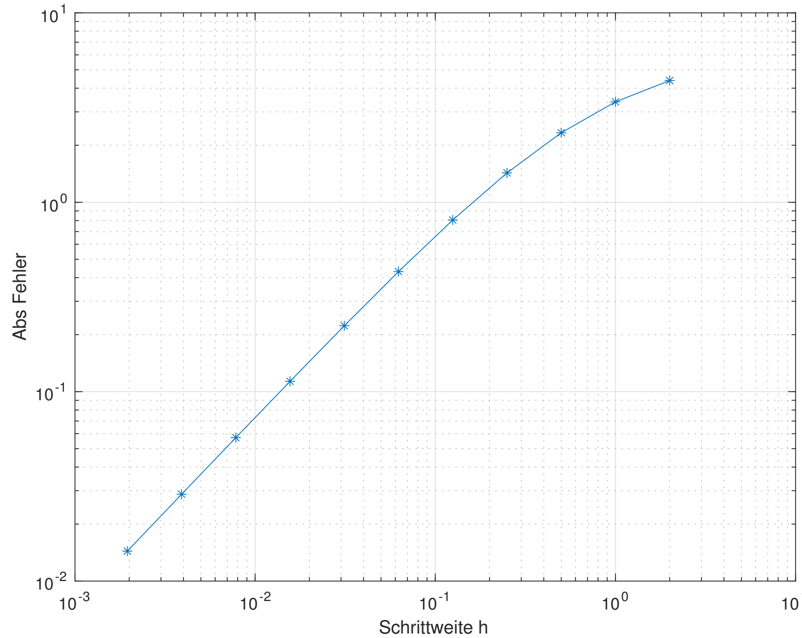

Abbildung 2 – `loglog`-Plot des absoluten Fehlers als Funktion der Schrittweite.

2. **a)** Wir setzen

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ -2z_2(t) + z_1(t) + z_0^2(t) - e^t \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir schreiben

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -z_1(t) + 2\cos(z_2(t)) \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. **a)** Sei $I := \dot{Q}$. Das äquivalente System von Differentialgleichungen erster Ordnung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ (E - Q/C - RI)/L \end{pmatrix}.$$

mit Anfangswerten

$$Q(t_0) = Q_0, \quad I(t_0) = I_0.$$

b) Siehe `expEulerRLC.m`. Wir beobachten, dass die Approximation mittels explizitem Eulerverfahren trotz der hohen Anzahl an Schritten (1000) und an Funktionsauswertungen (1000) schlecht ist.

4. *Trajektorie bei Streuung*

a) Schreiben wir die gew. Diff.-Gl. für den Position Vektor einzeln für die x und y Koordinate

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ m\ddot{y}(t) &= F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

wobei auf der rechten Seite die jeweilige Kraftkomponente steht welche sich aus dem Gradienten des Lennard-Jones Potentials ergeben. Letztere ergeben sich aus einfacher Anwendung elementarer Ableitungsregeln zu

$$\begin{aligned} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} &= -4\left(\frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}}\right)x \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} &= -4\left(\frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}}\right)y, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2$.

Nun müssen wir nur noch die beiden gew. Diff.-Gl zweiter Ordnung in Gl. (1) in jeweils 2 gew. Diff.-Gl. erster Ordnung umschreiben. Schreiben wir zuerst die

Bitte wenden!

Diff.-Gl. für die x Koordinates des Teichens um. Hierzu führen wir die folgende neuen Variabeln ein

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) \\ x_2(t) &= \ddot{x}(t) = \frac{F_x}{m} = \dot{x}_1(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Hier haben wir die durch die Masse m dividierte Gl. (1) verwendet. Aus Gl. (3) ergibt sich nun folgendes System zweier gew. Diff.-Gl. erster ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{F_x}{m}. \end{aligned} \tag{4}$$

Genau gleich formt man die Diff.-Gl. für die y Koordinates des Teichens um zu:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gl. (4) und (5) können wir zusammenführen als

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) \tag{6}$$

wobei wir den Vektor

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

einführt haben. Die rechte Seite ist dann gegeben durch

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} z_2 \\ F_x/m \\ z_4 \\ F_y/m \end{pmatrix} \tag{8}$$

wobei man natürlich noch die Kraft in der $\mathbf{z}$ Variabeln schreibt

$$\begin{aligned} F_x &= 4\left(\frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}}\right) z_1(t) \\ F_y &= 4\left(\frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}}\right) z_3(t) \end{aligned} \tag{9}$$

mit $r^2 = z_1(t)^2 + z_3(t)^2$.

b) Die Implementierung finden Sie in den kommentierten `streuung.m` und `fstreuung.m`.