D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Numerische Methoden

FS 2017

Lösung 9

1. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

a) Das Verfahren ist durch

$$\begin{aligned} k_1 =& f(t_n, y_n), \\ k_2 =& f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1), \\ y_{n+1} =& y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

definiert.

b) Wie wir in Aufgabe 2 der Serie 8 gesehen haben, vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung erheblich bei einem autonomisierungsinvarianten Verfahren.

Schritt 1: Wir überprüfen zunächst, ob die Methode autonomisierungsinvariant ist

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{2} a_{1j} = 0 + 0 = 0 \qquad ✓$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{2} a_{2j} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} \qquad ✓$$

Schritt 2: Wie erklärt in Serie 8, um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} \tau_{j+1} = & \Big(\dot{y}(t_j) - \ \ \Phi(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h}{2}\Big(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h^2}{6}\Big(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \cdots \\ & + O(h^p) \end{aligned} \tag{1}$$

Bitte wenden!

berechnen und die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

In unserem Fall ist die Verfahrens-Funktion definiert durch

$$\Phi(h) = \Phi(t_j, y(t_j), h) := \frac{1}{4}\left(f\left(y\left(t_j\right)\right) + 3f\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right)\right).$$

Nun berechnen wir die Terme in der Φ Entwicklung und

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(h) &= \frac{1}{2}f(y(t_j))\frac{\partial f}{\partial y}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right), \\
\ddot{\Phi}(h) &= \frac{1}{3}\left(f(y(t_j))\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Lösung haben wir

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(y(t)) \\
\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt}f(y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t))f(y(t)) \\
\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}f(y(t)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\, f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich

$$\begin{aligned}
\Phi(t_j, y(t_j), 0) &= \dot{y}(t_j), \\
2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &= \ddot{y}(t_j), \\
3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &\neq \dddot{y}(t_j),
\end{aligned}$$

ergibt sich dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

c) Es folgt von Satz II.3, dass das Verfahren Konvergenzordnung 2 hat.

2. *Konsistenz expliziter Runge-Kutta Verfahren*

Siehe nächstes Blatt!

Gemäss Hinweis, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= f(t_0 + c_1 h, y_0) = f(t_0, y_0) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h),\\
k_2(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_2 h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{a_{21} h k_1(h)}_{\Delta y}\Bigg)\\
&= f(t_0, y_0) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + a_{21} h k_1(0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h),\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
k_i(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_i h}_{\Delta t}, \underbrace{y_0 + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j(h)}_{\Delta y}\Bigg)\\
&= f(t_0, y_0) + h c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0,y_0)+O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2)\\
&= f(t_0, y_0) + O(h),\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
k_s(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_s h}_{\Delta t}, \underbrace{y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} k_j(h)}_{\Delta y}\Bigg)\\
&= f(t_0, y_0) + h c_s \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0,y_0)+O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2)\\
&= f(t_0, y_0) + O(h).
\end{aligned}
$$

Ein Schritt eines expliziten RK Verfahrens lautet dann

$$
y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.
$$

Aus $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, erhalten wir

$$
y_1 = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) (f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)) = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2).
$$

Bitte wenden!

Der Konsistenzfehler ist dann

$$
\begin{aligned}
\frac{|y(h)-y_1|}{h} &= \frac{|y_0 + hf(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h^2) - y_1|}{h} \\
&= \frac{|y_0 + hf(t_0,y_0) - y_0 - h\left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h^2))|}{h} \\
&= \left| \left(1 - \sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h) \right|.
\end{aligned}
$$

Damit das Verfahren konsistent ist für alle hinreichend glatten f, muss gelten

$$
\frac{|y(h)-y_1|}{h} \to 0 \quad (h \to 0).
$$

Dies soll auch gelten für z.B. $f(t,y) = 1$. Dies ist nur möglich falls

$$
\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.
$$

Bemerkung: Aus obiger Darstellung folgt auch direkt, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ hinreichend ist für die Konsistenz eines expliziten RK Verfahrens.