Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Serie 3

1. 3-Punkte Gauss Quadraturregel

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte 3-Punkte Gauss Quadraturregel $G_2[f]$ herleiten.

a) Berechnen Sie die Quadratur Knoten von $G_2[f]$ in dem Sie die Nullstellen des Legendre-Polynoms dritten Grades $P_3(x)$ bestimmen.

b) Bestätigen Sie, dass $G_2[f]$ Ordnung 6 hat.

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
y = summ3punktgauss(f,a,b,N),
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 3 Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Serie 2 Aufgabe 2**e)** für $G_2[f]$ mit den Integranden

$$f_1(x) = x\cos(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x-a)^{7/3}$$

auf dem Intervall $[\sqrt{2}, \pi]$. Was beobachten Sie?

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

2. In der numerischen Mathematik spricht man von algebraischer und exponentieller Konvergenz einer Methode, falls der Fehler der Methode sich wie

$$E(N) = CN^{-\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad E(N) = Cq^N$$

verhält für N gross genug. Hier sind C und α positive Konstanten und N entspricht einem Methodenparameter (z.B. die Anzahl Teil-Intervalle einer summierten Quadraturregel oder den Genauhigkeitsgrad einer Quadraturregel).

Bitte wenden!

Die MATLAB -Funktion `Konvergenz` berechnet Approximationen des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 f_i(x)dx, \qquad i = 1, 2,$$

wobei

$$f_1(x) = \cosh(x), \qquad f_2(x) = \sqrt{x},$$

mittels Gauss-Legendre Quadratur und plottet die Quadraturfehler als Funktion der Anzahl Knoten der Quadraturregel. Beschreiben Sie welche Art von Konvergenz für f_1 und f_2 vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q.

3. Quadratur für 2D-Integrale

In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, wie man mittels den in der Vorlesung kennengelernten Quadraturregeln auch zweidimensional Integrale approximativ berechnen kann. Dies wid oft in sog. finiten Elementen Methoden verwendet um näherungsweise z.B. die Maxwell-Gleichungen zu lösen.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten das Integral

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy\,, \tag{1}$$

wobei $[a, b] \times [c, d]$ ein rechteckiges Gebiet darstellt. Um eine Approximation von (1) herzuleiten, definieren wir die Funktion

$$F(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx\,, \tag{2}$$

und wandeln (1) in ein eindimensionales Integral um, d.h.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d F(y)\, dy\,. \tag{3}$$

Dann wenden wir eine 1D-Quadraturregel mit Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$ und Gewichte $\{w_i\}_{i=0}^n$ auf die rechte Seite von (3) an. Wir erhalten

$$\int_c^d F(y)\, dy \approx \sum_{i=0}^n w_i F(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i \int_a^b f(x, x_i)\, dx\,.$$

Wir definieren nun die Funktion

$$G(x) := \sum_{i=0}^n w_i f(x, x_i)\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit gilt

$$\sum_{i=0}^{n} w_i \int_a^b f(x, x_i)\, dx = \int_a^b G(x)\, dx\,.$$

Wir verwenden nochmals die 1D-Quadraturregel, diesmal auf $\int_a^b$, und erhalten

$$\int_a^b G(x)\, dx \approx \sum_{0=1}^{n} w_i G(x_i) = \sum_{i,j=0}^{n} w_i w_j f(x_i, x_j) =: \sum_{i,j=0}^{n} \widehat{w}_{i,j} f(\mathbf{x}_{i,j})\,. \qquad (4)$$

Die rechte Seite von (4) entspricht einer 2D-Quadraturregel mit Gewichten $\{\widehat{w}_{i,j}\}_{i,j=0}^{n}$ und Knoten $\{\mathbf{x}_{i,j}\}_{i,j=0}^{n}$ zur Approximation von Integral (1).

a) Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Referenzviereck $[-1, 1] \times [-1, 1]$ an.
Was können Sie über die Lage der Knotenpunkte aussagen?

b) Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$ an.

Abgabe: Bis Freitag, den 17.03.2016.
Erstellen Sie ein Zip-file ihrer MATLAB -Programme und laden Sie dieses unter `www.math.ethz.ch/~grsam/submit` hoch.
Die schriftlichen Ergebnisse können Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.