Serie 7

1. Gegeben sei die folgende Quadraturformel auf dem Referenzintervall

$$I[g] = \int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right) = Q[g].$$

a) Überprüfen Sie, dass die Quadraturformel Ordnung 2 hat.

b) Verwenden Sie die Quadraturformel um ein RK-ESV zur Lösung von Anfangswertproblemen herzuleiten. Gehen Sie dazu wie inder Vorlesung vor und approximieren Sie die 2 unbekannten Zwischenwerte jeweils mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens ausgehend von y_0.

Hinweis: Zur Überprüfung Ihres Ergebnisses: wir suchen

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & & \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

c) Untersuchen Sie die Konvergenzordnung dieses Verfahrens empirisch anhand vom AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2. \end{cases}$$

Hinweis: Arbeiten Sie in den Templates `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`.

2. *Butcher-Tableaux*

Geben Sie für die folgenden Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

a)

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + h, y_j + h k_2\right), \\ k_4 &= f\left(t_j + h, y_j + h k_3\right), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_4\right). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{h}{3} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + \frac{2h}{3}, y_j + \frac{2h}{3} k_2\right), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_3\right). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{4}\left(k_1 + k_2\right)\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + h, y_j + h k_2\right), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3\right). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_1\right), \\ y_{j+1} &= y_j + k_1. \end{aligned}$$

3. *Das Klassische Runge-Kutta Verfahren*

Das klassische Runge-Kutta Verfahren ist gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.

Hinweis: Arbeiten Sie im Template `klassischeRK.m`

c) Mithilfe des Templates von Aufgabe **1. c)**, untersuchen Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens.

4. *Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler*

Ergänzen Sie das Template `lokglobFehler_linear.m`, das den lokalen (nach einem Schritt) und globalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens aus Aufgabe **1.** und der klassischen Runge-Kutta mit dem AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2. \end{cases}$$

untersucht. Was beobachten Sie?

Abgabe: Bis Freitag, den 14.04.2017.