I. Lineare Gleichungssysteme (LGSe)

Wozu? LGSe sind allgegenwärtig im Ingenieurwesen

↳ Beispiel zu idealem Fachwerk (truss)

... viele mehr ...

Lösen von LGSen ist eine der grundlegendsten Aufgaben der Linearen Algebra (LA).

Lernziele:
- Lösungsmenge eines LGS bestimmen
- Fälle unterscheiden, bei denen ein LGS
  - eine
  - keine
  - ∞-viele

  Lösungen hat
- Systematisches Verfahren zum lösen von LGSen

  ⇝ Gauss-Verfahren
- Kosten? ... wieviel Rechenaufwand

Bsp.: (1)

$$\begin{aligned} x_1 + 3 \cdot x_2 &= 11 \quad \longleftarrow \text{Gleichung } 1 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &= 7 \quad \longleftarrow \text{Gl. } 2 \end{aligned}$$

1. 2. Unbekannte

Also ein LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekanten

Durch einfaches einsetzen verifiziert man

$x_1 = 2, \; x_2 = 3$

das LGS lösen.

Allgemein bestehen LGS aus m Gleichung und n Unbekanten.

⌐ Warum bezeichnen wir die Unbekanten mit x_1, x_2 und nicht x, y?

subscript

Weil uns die Buchstaben schnell ausgehen ... die Zahlen aber nicht :-) ⌙

Im Bsp. waren als $m = n = 2$

Bsp.: (2) LGS mit $m = n = 2$

$$x_1 - 2 \cdot x_2 = 2 \xrightarrow{\cdot 3 \text{ mal}} 3x_1 - 6 \cdot x_2 = 6$$
$$3x_1 - 6 \cdot x_2 = 3$$

Widerspruch!

Also keine Lösung

(3) LGS mit $m = 2$, $n = 3$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 5$$

Lösungen: (1) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$

(2) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

$\vdots$

$x_1 = 3\alpha - 1$, $x_2 = 3 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$

für $\alpha \in \mathbb{R}$

Element Symbol

Menge der reellen Zahlen

(4) LGS mit $m=3$, $n=2$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 4 \\ x_1 - x_2 &=& 1 \end{array}\right\} \rightsquigarrow x_1 = \frac{5}{2} \quad \left(x_2 = \frac{3}{2}\right)$$

$$x_1 = 2$$

Widerspruch!

Keine Lösungen.

Damit haben wir die wesentlichen Fälle kennengelernt, die beim lösen von LGS auftreten.
Aber halt nur für kleine LGS ...

Ziel: allgemein!

Bei der Diskussion von LGS erweist sich folgender Begriff als zweckmässig

Def.: Als Lösungsmenge bezeichnen wir die Menge aller Lösungen eines LGSs

<u>Bsp.:</u> (5) Lösungsmenge von LGS aus Bsp. (1)

$$\mathcal{L} = \{ (2,3) \}$$

Tupel mit Vereinbarung (x_1, x_2)

Mengenklammern

(6) ... aus Bsp. (2)

$$\mathcal{L} = \{ \quad \} = \emptyset$$ sog. leere Menge

keine Elemente!

(7) ... aus Bsp. (3)

$$\mathcal{L} = \{ (3\alpha - 1, 3 - 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (3\alpha - 1, 3 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (3\alpha - 1, 3 - 2\alpha, \alpha) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R} \}$$

... Notationen ...

(8) ... aus Bsp. (4)

$$\mathcal{L} = \{ \quad \} = \emptyset$$

I.1 Das Gauss-Verfahren

Ziel: einfaches & effizientes Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge eines LGSs

das es sogar ein Computer kann

das es möglichst wenig Rechenoperationen braucht (→ schnell)

Welches LGS würden Sie lieber lösen?

(LGS 1)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ 3\cdot x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(LGS 2)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 &= 3 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Klar (LGS 1)! Durch Rückwärtseinsetzen $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$

weil einfacher!

Also $\mathcal{L} = \{(1,2,3)\}$

Es stellt sich heraus, dass (LGS 2) die gleiche Lösungsmenge hat.

Def.: Wir nennen zwei LGS äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen

D.h. (LGS 1) äquivalent zu (LGS 2)

Kann man (LGS 2) in (LGS 1) umformen? JA!

(Elementaroperationen)

Folgende zwei Operationen führen ein LGS in äquivalentes über:

(I) Vertauschen von Gleichungen

(II) Addieren eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Übung: man kann (I) durch (mehrere) II erreichen ... bis auf ein Vorzeichen...

Bsp.: (9) zu (I)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned} \quad \text{äquivalent zu} \quad \begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(10) zu (II)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned} \quad \text{äquivalent zu} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -2 \end{aligned}$$

addiere das (−2)-fache der 1. Gl. zur 2. Gl.

Ein LGS ist einfach zu lösen wenn es sog. <u>Dreiecksgestalt</u> ha

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\
x_2 - x_3 &= -1\\
3\cdot x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

Man löst es dann einfach durch Rückwärtseinsetzen.

<u>Bsp.:</u> (11) LGS auf Dreiecksgestalt

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 && \text{(Gl. 1)}\\
-x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 &= 3 && \text{(Gl. 2)}\\
2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 11 && \text{(Gl. 3)}
\end{aligned}
$$

– (II) addiere (1)-Fache der Gl. 1 zu Gl. 2

$$3\cdot x_3 = 9 \qquad \text{(Gl. 2')}$$

– (II) addiere (–2)-Fache der Gl. 1 zu Gl. 3

Damit

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 && \text{(Gl. 1)}\\
3\cdot x_3 &= 9 && \text{(Gl. 2')}\\
x_2 - x_3 &= -1 && \text{(Gl. 3')}
\end{aligned}
$$

Dreiecksgestalt? Nein, vertausche noch Gl. 2' mit Gl. 3' ✓.

Op. (I)

Wir systematisieren dies nun für ein allgemeines LGS mit $m=n=3$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 &= b_1\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 &= b_2\\
a_{31}\cdot x_1 + a_{31}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

Dabei sind $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i,j \leq 3$

$b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq 3$

Wir bezeichnen: x_1, x_2, x_3 ... Unbekannten

a_{ij} ... Koeffizient der x_j-ten Unbekannte in der i-ten Gl.

b_i ... rechte Seite der i-ten Gl.

Man nennt alle a_{ij} die Koeffizienten des LGS.

$\rightsquigarrow$ s. Slides

21.09.16

<u>Bem.:</u> Wir haben stillschweigend angenommen

$$a_{11}^{(1)} \neq 0$$

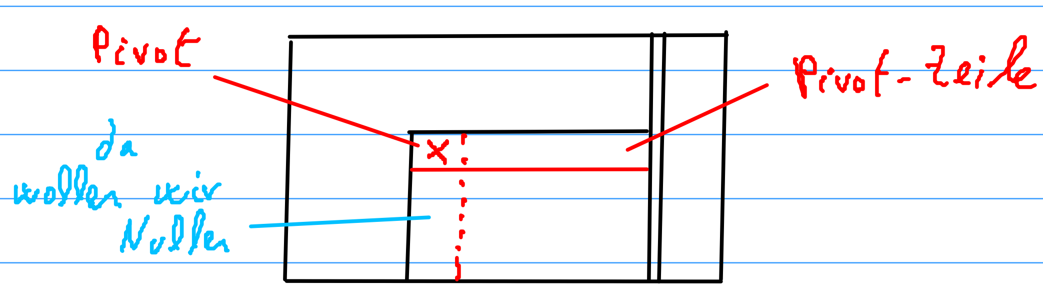
$$a_{22}^{(2)} \neq 0$$

$$a_{33}^{(3)} \neq 0$$

Falls dies nicht der Fall ist
↳ einfach Operation (I) benutzen und Zeilenvertauschen

<u>Def.:</u> wir nennen die Umformung eines Eliminationsschema mittels Operationen (I) und (II) in ein äquivalentes Schema, so dass die Elemente in der ersten Spalte ab der zweite Zeile alle Null sind, einen <u>Eliminationsschritt</u>

<u>Def.:</u> der erste Koeffizient in der ersten Zeile eines Eliminationsschema heisst <u>Pivot</u>.
Die ganze Zeile wird <u>Pivot-Zeile</u> genannt



Bsp.: (12)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

rechte Seite allgemein

Ausgangsschema

x_1	x_2	x_3	1
3	2	1	b_1
3	2	3	b_2
-3	-2	1	b_3

$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = -\frac{3}{3} = -3$

$\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) = -\frac{-3}{3} = 1$

1. Eliminationsschritt

3	2	1	b_1
0	0	2	$b_2 - b_1$
0	0	2	$b_3 + b_1$

$\left(-\frac{a_{33}}{a_{23}}\right) = -1$

Was nun?

Versuche 0 hier

Überspringe 2. Eliminationsschritt

3. Eliminationsschritt

3	2	1	b_1
0	0	2	$b_2 - b_1$
0	0	0	$b_3 - b_2 + 2 \cdot b_1$

Endschema

Somit lautet das äquivalente LGS in Bsp. (12)

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\
2x_3 &= b_2 - b_1 \\
0 &= b_3 - b_2 + 2b_1
\end{aligned}
$$

Wir stellen fest: – Manchmal muss man Eliminationsschritte überspringen

– nicht für beliebige rechte Seiten lösbar

$$b_3 - b_2 + 2b_1 = 0$$

Sog. Verträglichkeitsbedingungen

Damit: – Falls $b_3 - b_2 + 2b_1 \neq 0$

$\hookrightarrow \mathcal{L} = \emptyset$

– Falls $b_3 - b_2 + 2b_1 = 0$

$$x_3 = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(b_1 - 2 \cdot x_2 - \overbrace{\frac{1}{2}(b_2 - b_1)}^{x_3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3b_1}{2} - \frac{b_2}{2} - 2x_2\right)$$

sog. freier Parameter

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{1}{3}\left(\frac{3b_1}{2} - 2\alpha - \frac{b_2}{2}\right), \alpha, \frac{1}{2}(b_2 - b_1) \right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

einparametrige Schar von Lösungen

... d.h. ∞-viele

Bsp.: (13) LGS mit $m = n = 4$ + Parameter

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= s \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	1
2	-1	3	2	1
4	-2	7	2	4
-2	1	-2	-4	1
6	-3	7	10	s

$+\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = -\frac{4}{2} = -2$

$+\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) = -\frac{-2}{2} = 1$

$+\left(-\frac{a_{41}}{a_{11}}\right) = -\frac{6}{2} = -3$

2	-1	3	2	1
0	0	1	-2	2
0	0	1	-2	2
0	0	-2	4	s-3

$+\left(-\frac{a_{33}}{a_{23}}\right) = -\frac{1}{1} = -1$

$+\left(-\frac{a_{43}}{a_{23}}\right) = -\frac{-2}{1} = 2$

Pivots

x_1	x_2	x_3	x_4	1
2	-1	3	2	1
0	0	1	-2	2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	$s+1$

Verträglichbedingungen

Fall 1:

$$s+1 \neq 0 \rightsquigarrow \mathcal{L} = \emptyset$$

Fall 2:

$$s+1 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen

$$x_3 = 2 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2 - 3\cdot(2+2x_4) - 2x_4 + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2 - 8x_4 - 5\right) \end{aligned}$$

freie Parameter

Nennen wir $x_2 = \alpha$

$x_4 = \beta$

Damit

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\alpha - 8\beta - 5,\ \alpha,\ 2+2\beta,\ \beta \right) \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Schauen wir uns nochmal das Endschema von Bsp. (13) an:

freie Parameter

x_1	x_2	x_3	x_4	1	
2	−1	3	2	1	
0	0	1	−2	2	
0	0	0	0	0	Verträglichkeitsbed.
0	0	0	0	5+1	

Pivots

Betrachten wir nun (endlich!) den allgemeinen Fall mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m
\end{array}$$

Das Ausgangsschema ist dann:

x_1	x_2		x_n	1
a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Gaussverfahren

Setze $i=1$, $j=1$

(α) Falls $i > m$ oder $j > n$:

Gehe zu (L);

Sonst

(E_j) Führe im j-ten Eliminationsschema einen Eliminationsschritt durch

(a) Falls möglich, bestimme einen Zeilenindex $p \in \{i, \dots, m\}$ für den $a_{pj}^{(j)} \neq 0$;
Sonst setze $j = j+1$ und gehe zu (α).

(b) Falls $p \neq i$, vertausche die beiden Zeilen und numeriere entsprechend um.

(c) Für $k = i+1, \dots, m$:

Berechne $l_{ki} = \dfrac{a_{kj}^{(j)}}{a_{ij}^{(j)}}$ und subtrahiere das l_{ki}-fache der Zeile mit Index i von der Zeile mit Index k

(d) Setze $i = i+1$, $j = j+1$ und gehe zu (α)

NUR AM BEAMER GEMACHT

(L) Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen

Das Gaussverfahren ergibt folgendes Endschema:

Freie Parameter

1. 2. r. Pivot

	x_1	x_2	...	x_{j_2}		x_{j_r}		x_n	1
1	$\boxed{*}$	x	...					x	c_1
2	x	x	... 0	$\boxed{*}$				x	c_2
·	x	x	0	0	·			x	·
·	x	x	0		·			x	·
·	x	x	0		·			x	·
r	x	x	... 0		0	$\boxed{*}$		x	c_r
r+1	x	x	... 0		0	0	...	0	c_{r+1}
·	x	x	0		0	0		0	·
·	x	x	0		0	0		0	·
·	x	x	0		0	0		0	·
m	x	x	... 0	0	0	0 ...	...	0	c_m

Verträglichkeitsbed.

Dies ist die sog. Zeilenstufenform

22.09.16

Etwas genauer

Ein Schema ist in Zeilenstufenform, wenn für den Hauptteil gilt:

(i) Es gibt eine Zahl r mit $0 \leq r \leq m$, so dass in den Zeilen 1 bis r nicht nur Nullen stehen und in den Zeilen $r+1$ bis m nur Nullen stehen

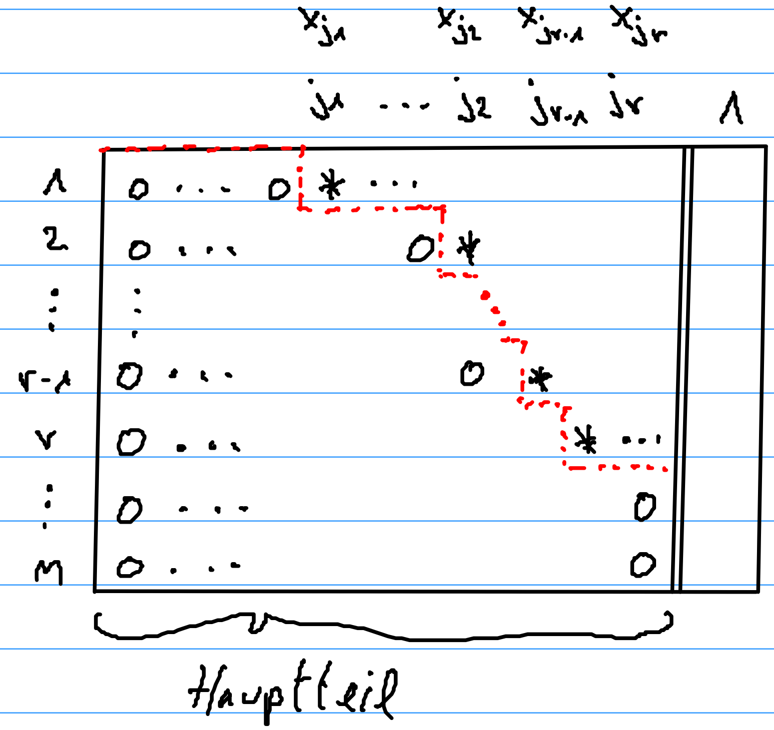
(ii) Für jede Zeile i mit $1 \leq i \leq r$ betrachten wir den niedrigsten Index j_i der Spalte in der ein Koeffizient ungleich Null steht, d.h.

$$j_i = \min \{ 1 \leq j \leq n \mid a_{ij} \neq 0 \}$$

Die Stufenbedingung lautet

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r$$

Anschaulich:



Bem.: (i) Die Koeffizienten $a_{pj}^{(j)}$ im Gaussverfahren sind die Pivots.

Im Endschema sind die Pivots die Koeffizienten in der i-ten Zeile und j_i-ten Spalte, $i=1,\dots,r$

Normalerweise: $j_1 = 1$

(ii) Die Dreiecksgestalt für $m=n$ ist eine spezielle, sehr regelmässige, Zeilenstufenform

I.2 Folgerungen aus dem Gauss'schen Endschema

Aus dem Endschema des Gaussverfahren können wir nun ganz einfach die Lösungsmenge des zugehörigen LGS bestimmen

Schon nur aus der Form/Gestalt des Endschemas können wir schon Aussagen über die Lösungsmenge machen (ohne Sie explizit zu berechnen!)

Def.: Die Zahl r heisst Rang des LGSs

Def.: Eine über einem Pivot stehende Unbekannte heisst Pivotvariable (Auch gebundene Variable)

Unbekannte die keine Pivotvariablen sind werden freie Parameter genannt (Auch freie Variablen)

Bem.: (i) Es gilt $0 \le r \le m$

(ii) Es gilt $r \le n$ da es nicht mehr Pivotvariablen als Unbekannte geben kann

(iii) Es gibt $n-r$ freie Parameter

(iv) Der Rang r eines LGSs ist <u>eindeutig bestimmt</u>

Wir fassen unsere Erkenntnisse in folgendem Satz zusammen:

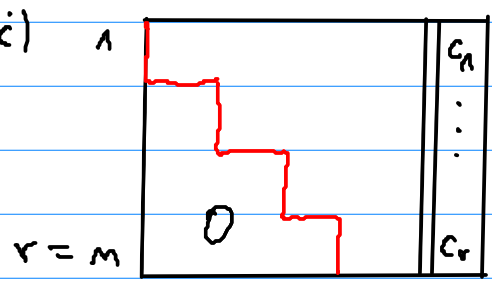
Satz I.1: Ein LGS hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn

entweder (i) $r = m$

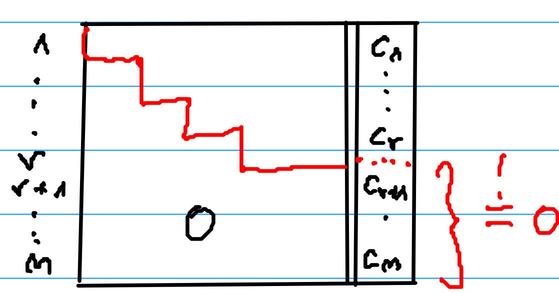
oder (ii) $r < m$ und $c_i = 0$ für $i = r+1, \dots, m$

Anschaulich:

(i)



(ii)



D.h. keine Verträglichkeitsbed.!

falls $r < n$ gibt es $n-r$ freie Parameter

$\rightsquigarrow$ entweder Verträglichkeitsbed. nicht erfüllt

$\hookrightarrow \mathcal{L} = \emptyset$

oder $(n-r)$-Parametrige Schar von Lösungen

Zusammengefasst:

<u>Satz I.2:</u> Die Lösung eines LGS – falls sie existiert – ist genau dann eindeutig wenn $r = n$ ist.

Zum Schluss definieren wir noch das zu einem LGS zugehörige <u>homogene LGS</u>:

LGS und rechte Seite gleich Null.

Also

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = 0 \end{matrix}$$

Bem.: – klar: das homogene LGS hat immer eine Lösung
(immer erfüllt für die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$)
Warum? Weil keine Verträglichkeitsbed.!

Nun fassen wir noch 3 Resultate zusammen:

im Buch 1.4

Korollar I.3: Ein LGS ist genau dann für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $r = m$.

im Buch 1.6

Korollar I.4: Sei $m = n$. Die Lösung ein LGS ist genau eindeutig, wenn das LGS für beliebige rechte Seiten lösbar ist.

im Buch 1.7

Satz I.5: Sei $m = n$. Ein LGS ist genau dann für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn das zugehörige homogene LGS nur die triviale Lösung besitzt.

I.3 Rechenaufwand des Gaussverfahrens

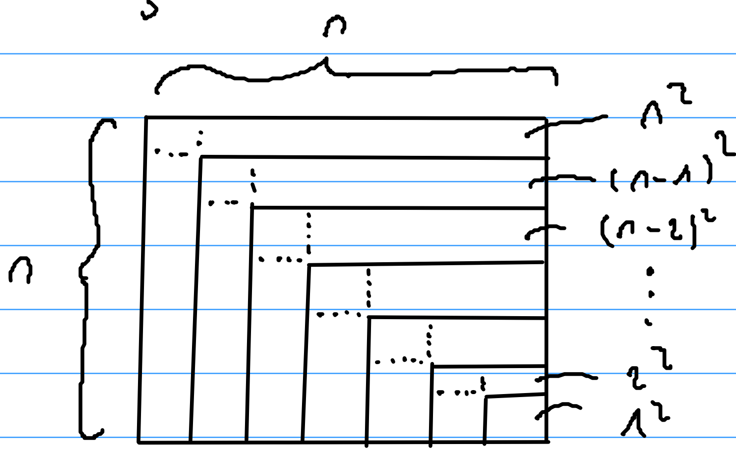
Wieviele wesentlichen Operationen $(+, -, \cdot, /)$ benötigt das Gaussverfahren?

Für $m = n$ (häufiger Fall in Praxis!)

Kurz $\sim n^3$

Genauer $\sim \frac{1}{3} n^3$

Wieso?



... Pyramide $\rightsquigarrow \sim \dfrac{n^3}{3} = \dfrac{1}{3} n^2 \cdot n$

$\dfrac{1}{3}$ Grundfläche $\times$ Höhe