

# Gauss-Verfahren 3x3

LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

# Gauss-Verfahren 3x3

Ziel: Dreiecksgestalt

$$\tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 + \tilde{a}_{13} x_3 = b_1$$

$$\tilde{a}_{22} x_2 + \tilde{a}_{23} x_3 = b_2$$

$$+ \tilde{a}_{33} x_3 = b_3$$

“Tilde” weil sich die Koeffizienten ändern!



# Schema

 $x_1$  $x_2$  $x_3$ 

1

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$

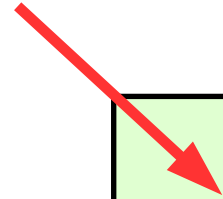
# Ausgangsschema = 1. Eliminationsschema

$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

## 1. Eliminationsschritt

# 1. Eliminationsschritt

Pivot



$x_1$

$x_2$

$x_3$

1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

0



1.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{11}^{(1)} \end{pmatrix} = -l_{21}$  mal die 1. Zeile zur 2. Zeile

# 1. Eliminationsschritt

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0 →	$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

1.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{11}^{(1)} \end{pmatrix} = -l_{21}$  mal die 1. Zeile zur 2. Zeile

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
 & a_{11}^{(1)}(-l_{21}) & a_{12}^{(1)}(-l_{21}) & a_{13}^{(1)}(-l_{21}) & b_1^{(1)}(-l_{21}) \\
 + & a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
 \hline
 & 0 & a_{22}^{(1)} - l_{21}a_{12}^{(1)} & a_{23}^{(1)} - l_{21}a_{13}^{(1)} & b_2^{(1)} - l_{21}b_1^{(1)}
 \end{array}$$

# 1. Eliminationsschritt

1.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{11}^{(1)} \end{pmatrix} = -l_{21}$  mal die 1. Zeile zur 2. Zeile

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$



**1. Eliminationsschritt**

	$a_{11}^{(1)}(-l_{21})$	$a_{12}^{(1)}(-l_{21})$	$a_{13}^{(1)}(-l_{21})$	$b_1^{(1)}(-l_{21})$
+	$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$



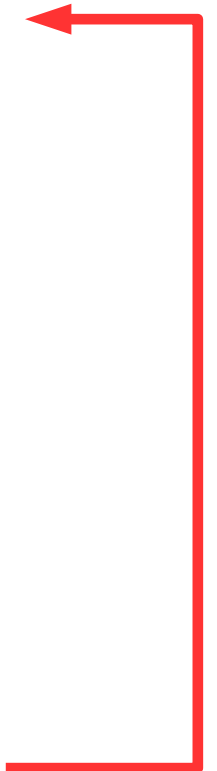
1.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{11}^{(1)} \end{pmatrix} = -l_{21}$  mal die 1. Zeile zur 2. Zeile

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

	$a_{11}^{(1)}(-l_{21})$	$a_{12}^{(1)}(-l_{21})$	$a_{13}^{(1)}(-l_{21})$	$b_1^{(1)}(-l_{21})$
+	$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$

# 1. Eliminationsschritt




# 1. Eliminationsschritt

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0 →	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

1.2) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -l_{31}$  mal die 1. Zeile zur 3. Zeile

# 1. Eliminationsschritt

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0 	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

1.2) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{pmatrix} = -l_{31}$  mal die 1. Zeile zur 3. Zeile

**1. Eliminationsschritt**

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

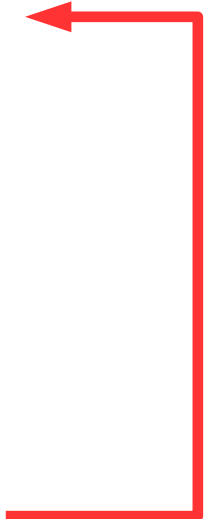
	$a_{11}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{12}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{13}^{(1)} (-l_{31})$	$b_1^{(1)} (-l_{31})$
+	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$
	0	$a_{32}^{(1)} - l_{31} a_{12}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)} - l_{31} a_{13}^{(1)}$	$b_3^{(1)} - l_{31} b_1^{(1)}$

1.2) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{pmatrix} = -l_{31}$  mal die 1. Zeile zur 3. Zeile

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

	$a_{11}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{12}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{13}^{(1)} (-l_{31})$	$b_1^{(1)} (-l_{31})$
+	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$
<hr/>				
	0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$



# 1. Eliminationsschritt

1.2) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{pmatrix} = -l_{31}$  mal die 1. Zeile zur 3. Zeile

**1. Eliminationsschritt**

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$



	$a_{11}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{12}^{(1)} (-l_{31})$	$a_{13}^{(1)} (-l_{31})$	$b_1^{(1)} (-l_{31})$
+	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$
	0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

## 2. Eliminationsschema

$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

2. Eliminationsschritt

## 2. Eliminationsschritt

Pivot

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$



2.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \end{pmatrix} = -l_{32}$  mal die 2. Zeile zur 3. Zeile

## 2. Eliminationsschritt

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

2.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \end{pmatrix} = -l_{32}$  mal die 2. Zeile zur 3. Zeile

2. Eliminationsschritt

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

	$a_{22}^{(2)} (-l_{32})$	$a_{23}^{(2)} (-l_{32})$	$b_1^{(2)} (-l_{32})$
+	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$
	0	$a_{33}^{(2)} - l_{32}a_{23}^{(2)}$	$b_3^{(2)} - l_{32}b_1^{(2)}$

2.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \\ a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = -l_{32}$  mal die 2. Zeile zur 3. Zeile

**2. Eliminationsschritt**

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

	$a_{22}^{(2)} (-l_{32})$	$a_{23}^{(2)} (-l_{32})$	$b_1^{(2)} (-l_{32})$
+	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$
	$0$	$a_{33}^{(3)}$	$b_3^{(3)}$



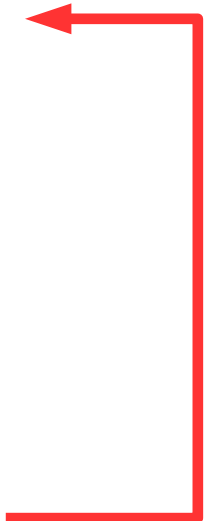
2.1) Addiere  $\begin{pmatrix} -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \end{pmatrix} = -l_{32}$  mal die 2. Zeile zur 3. Zeile

2. Eliminationsschritt

$x_1$                        $x_2$                        $x_3$                       1

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	0	$a_{33}^{(3)}$	$b_3^{(3)}$

	$a_{22}^{(2)} (-l_{32})$	$a_{23}^{(2)} (-l_{32})$	$b_1^{(2)} (-l_{32})$
+	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$
	0	$a_{33}^{(3)}$	$b_3^{(3)}$



### 3. Eliminationsschema = Endschema

$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	0	$a_{33}^{(3)}$	$b_3^{(3)}$

Pivot

Voilà! Rückwärtseinsetzen...

3. Eliminationsschritt