

II. Matrizen

Wozu? Um LGS einfacher zu schreiben $A\vec{x} = \vec{b}$
zum beschreiben von linearen Abbildung

- Lernziele:
- Rechnen mit Matrizen/Vektoren
 - LGS aufschreiben mit Matrizen und Vektoren
 - Inverse von Matrizen
 - LR Zerlegung

II.1 Definition und spezielle Matrizen

Def.: Eine $m \times n$ Matrix A ist ein Schema von $m \cdot n$ Zahlen, angeordnet in m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Die a_{ij} oder $(A)_{ij}$ bezeichnen wir als die das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

Bsp.: (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$a_{23} = (A)_{23} = 6$$

Def.: Eine $n \times n$ Matrix A heisst
quadratische Matrix

Def.: Wir sagen das zwei Matrizen A und
 B gleich sind, falls

$$a_{ij} = (A)_{ij} = (B)_{ij} = b_{ij}$$

D.h. gleiche Grösse und gleiche Elemente!

Bsp.: (2) $\begin{pmatrix} 3\pi & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12\pi}{4} & 2^{1/2} \\ 2 \cdot 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun einige spezielle Matrizen

Def.: (i) A heisst $m \times n$ Nullmatrix, falls

$$(A)_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j$$

(ii) R quadratisch heisst obere Dreiecksmatrix oder Rechtsdreiecksmatrix, falls

$$(R)_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j$$

$$\leadsto R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

L quadratisch heisst untere Dreiecksmatrix oder Linksdreiecksmatrix, falls

$$(L)_{ij} = 0 \quad \text{für } i < j$$

$$\leadsto L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(iii) D quadratisch heisst Diagonalmatrix, falls $(D)_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$$\leadsto D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 2, 3)$$

Die $(D)_{ii}$ heissen Diagonalelemente

(iv) I quadratisch heisst Einheitsmatrix oder Identität, falls

$$I = \text{diag}(1, \dots, 1)$$

Manchmal I_n und E_n

betont $n \times n$!

$$\leadsto I = I_3 = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1)$$

Def.: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann heisst die $n \times m$ Matrix A^T mit

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

die Transponierte von A .

$$\leadsto A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Def.: Eine Matrix A heisst symmetrisch, falls

$$A^T = A$$

「Für welche Matrizen geht das? Quadratische!」

$$\leadsto A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A^T$$

5

Def.: (i) Eine $n \times 1$ Matrix $\vec{b}$ heisst Spalten-Vektor
oder kurz Vektor

$$\leadsto \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(ii) Eine $1 \times n$ Matrix $\vec{b}^T$ heisst Zeilen-Vektor

$$\leadsto \vec{b}^T = (1 \ 2 \ 3) \in \mathbb{R}^3$$

II.2 Rechnen mit Matrizen

Def.: Addition

Seien A, B $m \times n$ Matrizen.

Die $m \times n$ Matrix $A+B$ mit

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

heisst Summe von A und B .

d.h. Elementweise Summe

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Def.: Multiplikation mit einer Zahl

Sei A eine $m \times n$ Matrix.

Dann αA mit

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot (A)_{ij}$$

D.h. jedes Element mit α multipliziert

$$\leadsto 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Def.: Multiplikation zweier Matrizen

Sei A eine $m \times n$ Matrix und B eine $n \times p$ Matrix. Die Matrix AB mit

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{kj} = (A)_{i1} (B)_{1j} + (A)_{i2} (B)_{2j} + \dots + (A)_{in} (B)_{nj}$$

$\nwarrow$ Summen Zeichen $\nearrow$

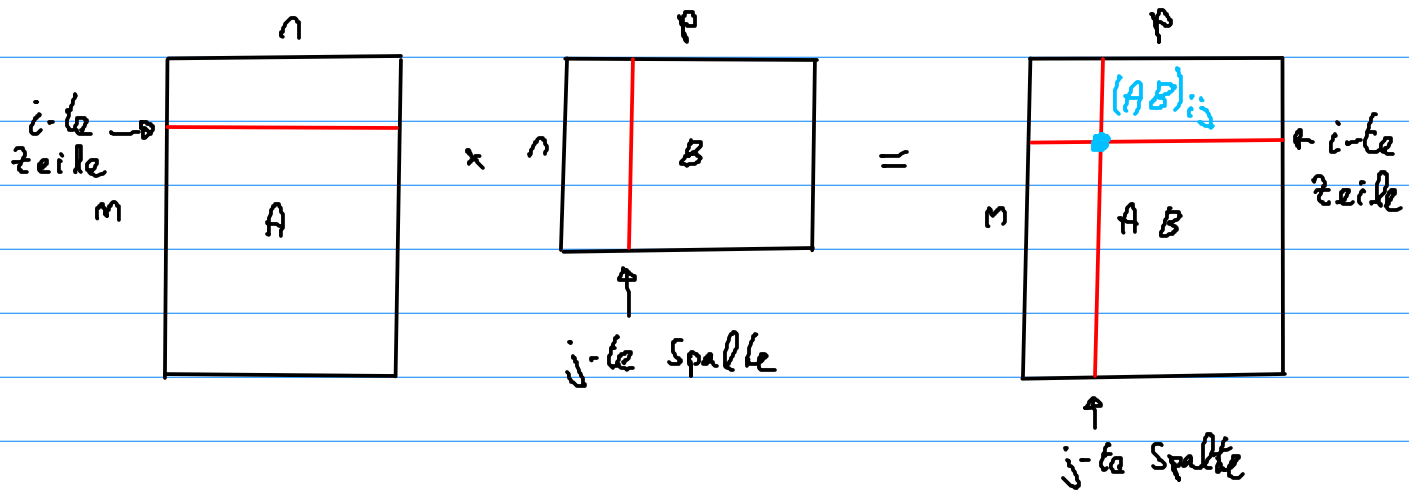
heißt Produkt von A und B

Bem.: Man kann nicht beliebig grosse Matrizen A, B miteinander multiplizieren

Die Anzahl Spalten von A muss mit der Anzahl Zeilen von B übereinstimmen! 

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$$

Graphisch:



Quiz:

$$A \quad q \times p$$

$$B \quad p \times m$$

$$AB \begin{cases} m \times p \\ q \times m \end{cases} \quad ?$$

$$BA \begin{cases} m \times q \\ \text{geht nicht} \end{cases} \quad ?$$

Bsp.: (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 32 & 21 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix}$$

(6) Man kann das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$\vec{a}^T \vec{b} = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Euklidische Norm / Länge eines Vektors

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^T \vec{a}$$

$$= (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2$$

Matrixschreibweise von LGS

LGS mit m Gl. in n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Kurz kann man das mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und den (Spalten-) Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

als

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

Bsp.: (7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\ 7 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Gleichheit, nach Def. oben, bedeckt

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = b_1$$

$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = b_2$$

$$7 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = b_3$$

LSC mit $m=3$ Gl. und $n=2$ Unbekante.

✓.

Für das Rechnen mit Matrizen gelten folgende Regeln:

Satz II.1: (i) Für $m \times n$ Matrizen A, B gilt das Kommutativgesetz bez. der Addition

$$A + B = B + A$$

(ii) Für $m \times n$ Matrizen A, B, C gilt das Assoziativgesetz bez. der Addition

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(iii) Für $m \times n$ Matrix A , $n \times p$ Matrix B , $p \times q$ Matrix C gilt das Assoziativgesetz bez. der Matrixmultiplikation

$$(AB)C = A(BC)$$

(iv) Für $m \times n$ Matrizen A, B und $n \times p$ Matrizen C, D gelten die Distributivgesetze

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(C + D) = AC + AD$$

Bew.: zeige nur (iv) $A(C+D) = AC + AD$

z.z.: $A(C+D) = AC + AD$

Gehen die Produkte überhaupt?

$$\begin{array}{c} m \times n \quad n \times p \\ \underbrace{A(C+D)}_{m \times p} = \underbrace{AC}_{m \times p} + \underbrace{AD}_{m \times p} \quad \checkmark \end{array}$$

Sind die Elemente ^{"mal"} gleich?

$$\begin{aligned} (A(C+D))_{ij} &\stackrel{\text{Def. x}}{=} \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (C+D)_{kj} \\ &\quad \downarrow \text{Def. +} \\ &= \sum_{k=1}^n (A)_{ik} ((C)_{kj} + (D)_{kj}) \end{aligned}$$

Distributiv für Zahlen

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^n \left[(A)_{ik} (C)_{kj} + (A)_{ik} (D)_{kj} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (C)_{kj} + \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (D)_{kj}$$

$$= (AC)_{ij} + (AD)_{ij} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Zeige (i): } (A+B)_{ij} \stackrel{\text{Def. +}}{=} (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\substack{\text{Kommutativgesetz} \\ \text{für Zahlen}}}{=} (B)_{ij} + (A)_{ij} \\ & \stackrel{\text{Def. +}}{=} (B+A)_{ij} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeige (ii): } ((A+B)+C)_{ij} & \stackrel{\text{Def. +}}{=} (A+B)_{ij} + (C)_{ij} \\ & \stackrel{\text{Def. +}}{=} ((A)_{ij} + (B)_{ij}) + (C)_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\substack{\text{Assoziativgesetz} \\ \text{für Zahlen}}}{=} (A)_{ij} + ((B)_{ij} + (C)_{ij}) \\ & \stackrel{\text{Def. +}}{=} (A)_{ij} + (B+C)_{ij} \\ & \stackrel{\text{Def. +}}{=} (A+(B+C))_{ij} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Zeige (iii): } (AB)C = A(BC)$$

Geh't's?

$$\begin{aligned} (AB)C &= ((m \times n)(n \times p))(p \times q) \\ &= (m \times p)(p \times q) = (m \times q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= (m \times n)((n \times p)(p \times q)) \\ &= (m \times n)(n \times q) = (m \times q) \end{aligned}$$

Elemente gleich?

$$((AB)C)_{ij} \stackrel{\text{Def. x}}{=} \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} (C)_{kj}$$

$$= (AB)_{i1} (C)_{1j} + (AB)_{i2} (C)_{2j} + \dots + (AB)_{ip} (C)_{pj}$$

$$= \sum_{l=1}^n (A)_{il} (B)_{l1} (C)_{1j}$$

$$+ \sum_{l=1}^n (A)_{il} (B)_{l2} (C)_{2j}$$

+ ...

$$+ \sum_{l=1}^n (A)_{il} (B)_{lp} (C)_{pj}$$

$$\begin{aligned} &= (A)_{i1} (B)_{11} (C)_{1j} + \dots + (A)_{in} (B)_{n1} (C)_{1j} \\ &+ (A)_{i1} (B)_{12} (C)_{2j} + \dots + (A)_{in} (B)_{n2} (C)_{2j} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$+ (A)_{i1} (B)_{1p} (C)_{pj} + \dots + (A)_{in} (B)_{np} (C)_{pj}$$

$$= (A)_{i1} \sum_{k=1}^p (B)_{1k} (C)_{kj}$$

+ ...

$$+ (A)_{in} \sum_{k=1}^p (B)_{nk} (C)_{kj}$$

Def. x

$$= (A)_{i1} (BC)_{1j} + \dots + (A)_{in} (BC)_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (BC)_{kj} \stackrel{\text{Def. x}}{=} (A(BC))_{ij}$$

Bem.: (i) Wie bereits in Bsp. (4), (5) festgestellt,
ist die Matrixmultiplikation i.A.
nicht kommutativ

↑
im Allgemeinen

(ii) Für jede $m \times n$ Matrix A gilt

$$I_m A = A I_n = A$$

Daher der Name Identität / Einheitsmatrix!

Für das Transponieren gelten folgende
Rechenregeln:

II.4 Buch

Satz II.2: (i) Für jede Matrix A gilt

$$(A^T)^T = A$$

(ii) Für A, B Matrizen gilt

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

(iii) Für A $m \times n$ Matrix und B
 $n \times p$ Matrix gilt

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Bewe.: (i) $\left((A^T)^T\right)_{ij} \stackrel{\text{Def. } T}{=} (A^T)_{ji} \stackrel{\text{Def. } T}{=} (A)_{ij} \quad \checkmark$

(ii) $\left((A+B)^T\right)_{ij} \stackrel{\text{Def. } T}{=} (A+B)_{ji}$
 $\stackrel{\text{Def. } +}{=} (A)_{ji} + (B)_{ji}$
 $\stackrel{\text{Def. } T}{=} (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} \quad \checkmark$

(iii) geht's?

$$(AB)^T = \left((m \times n)(n \times p)\right)^T = (m \times p)^T = (p \times m)$$

$$B^T A^T = (n \times p)^T (m \times n)^T \quad // \quad \checkmark$$

$$= (p \times n)(n \times m) = (p \times m)$$

Elemente gleich?

$$\left((A \ B)^T\right)_{ij} \stackrel{\text{Def. } T}{=} (A \ B)_{ji}$$

$$\stackrel{\text{Def. } \times}{=} \sum_{k=1}^n (A)_{jk} (B)_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n (B)_{ki} (A)_{jk}$$

$$\stackrel{\text{Def. } T}{=} \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj}$$

$$\stackrel{\text{Def. } \times}{=} (B^T A^T)_{ij} \quad \checkmark$$

Manchmal ist es zweckmässig beim Matrixprodukt besonders die Spalten- bzw. Zeilen-Struktur zu betonen.

Zur Betonung der Spaltenstruktur einer $m \times n$ Matrix A schreiben wir

$$A = \left(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n \right)$$

wobei die

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

(Spalten-) Vektoren sind.

Satz II.3: Seien A $m \times n$ Matrix, B $n \times p$ Matrix,
 $\vec{x}$ $n \times 1$ Spaltenvektor und $\vec{e}_i$ der
 i -te Spaltenvektor von I_n

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_i = (m \times 1) \qquad \vec{b}_i = (n \times 1)$

Dann gilt:

sog. linear
 Kombination der
 Spaltenvektoren von A

(i) $A \vec{e}_i = \vec{a}_i = i$ -ter Spaltenvektor von A

→ (ii) $A \vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$

(iii) $AB = \begin{pmatrix} A \vec{b}_1 & A \vec{b}_2 & \dots & A \vec{b}_p \end{pmatrix}$

Bew.: (i) Spezialfall von (ii) :-)

($\vec{x}$ mit allen Komponenten = 0 ausser
 die i -te $x_i = 1$)

$$(ii) \quad A \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Def. } x = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Def. } + = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 \\ a_{21} \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} \cdot x_2 \\ a_{22} \cdot x_2 \\ \vdots \\ a_{m2} \cdot x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \cdot x_n \\ a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Mult. mit
Zahl

$$\text{Def. } x = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

(ii) Aus (i) wissen wir: um die i -te Spalte von AB zu bekommen kann man

$$(AB) \vec{e}_i = A(B\vec{e}_i) = A \vec{b}_i$$



Satz II.1 (iii)

a.k.a. Assoziativgesetz der
Matrixmult.

$$\leadsto AB = \begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_p \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Zur Betonung der Zeilen-Struktur einer $m \times n$ Matrix A schreiben wir:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{pmatrix}$$

wobei die

$$\vec{a}_i^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$1 \times n$ Zeilenvektoren sind.

II.5 Buch

Korollar II.4: Seien A $m \times n$ Matrix, B $n \times p$ Matrix, $\vec{y}^T$ $1 \times n$ Zeilenvektor und $\vec{e}_i^T$ der i -te Zeilenvektor von I_n

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^T \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

(i) $\vec{e}_i^T B = \vec{b}_i^T = i\text{-ter Zeilenvektor}$

(ii) $\vec{y}^T B = y_1 \cdot \vec{b}_1^T + y_2 \cdot \vec{b}_2^T + \dots + y_n \cdot \vec{b}_n^T$ von B

(iii) $AB = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T B \end{pmatrix}$

Bew.: (i) Spezialfall von (ii)

$$(ii) \vec{y}^T B = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Def. x}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k b_{k1} & \sum_{k=1}^n y_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n y_k b_{kp} \end{pmatrix}$$

Mult. mit
Zahl

$$\stackrel{\text{Def. +}}{=} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} y_k b_{k1} & y_k b_{k2} & \dots & y_k b_{kp} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Def. x}}{=} \sum_{k=1}^n y_k \underbrace{\begin{pmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix}}_{\vec{b}_k^T}$$

$$= \sum_{k=1}^n y_k \vec{b}_k^T$$

$$= y_1 \cdot \vec{b}_1^T + y_2 \cdot \vec{b}_2^T + \dots + y_n \cdot \vec{b}_n^T$$

(iii) Aus (i) wissen wir wie man die
i-te Zeile von A

$$\vec{e}_i^T (AB) = (\vec{e}_i^T A) B = \vec{a}_i^T B$$

$$\leadsto AB = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

II.3 Die Inverse einer Matrix

Betrachten hier quadratische $n \times n$ Matrizen.

Def.: Die $n \times n$ Matrix X heisst Inverse der $n \times n$ Matrix A falls gilt

$$AX = I_n \quad \text{--- } n \times n \text{ Einheitsmatrix}$$

Def.: Falls eine Matrix A eine Inverse hat, nennen wir A invertierbar oder regulär

Andernfalls nennen wir A singulär

II.6 Buch

Lemma II.5: Die Inverse einer Matrix ist eindeutig bestimmt.

D.h. falls für $n \times n$ Matrizen A, X und Y gilt:
Aus $AX = I_n$ und $AY = I_n$ folgt $X = Y$.

Bew.: (a) Sei $AX = I_n$ und betrachten wir das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebiges $\vec{b}$.

Dieses LGS hat die Lösung $\vec{x} = X\vec{b}$, weil

$$A\vec{x} = A(X\vec{b}) \stackrel{\text{Assoziat. Matr. mult.}}{=} \underbrace{(AX)}_{I_n} \vec{b} = \vec{b} \quad \checkmark$$

Da das LGS für beliebige rechte Seiten $\vec{b}$ lösbar ist, folgern wir aus Korollar I.4 dass diese Lösung auch eindeutig ist.

(b) Schreiben wir nun $AX = I_n$ spaltenweise auf:

$$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} i\text{-te} \\ \text{Zeile} \end{matrix}$$

Aus Satz II.3 (iii):

$$AX = \begin{pmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Gleichheit: $A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \dots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$
 $\dots n \text{ LGS!}$

Nehmen wir nun an, es gebe eine $n \times n$ Matrix Y mit $AY = I_n$

$$Y = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \dots & \vec{y}_n \end{pmatrix}$$

Auch $AY = I_n$ ist äquivalent zu den n LGS:

$$A\vec{y}_1 = \vec{e}_1, A\vec{y}_2 = \vec{e}_2, \dots, A\vec{y}_n = \vec{e}_n$$

Aus Teil (a) wissen wir aber, dass jedes dieser n LGS eine eindeutige Lösung hat.

Also muss $\vec{x}_1 = \vec{y}_1, \vec{x}_2 = \vec{y}_2, \dots, \vec{x}_n = \vec{y}_n$ gelten, und damit

$$X = Y$$

Also falls eine $n \times n$ Matrix A regulär ist (also eine Inverse hat), dann ist diese eindeutig.

Deshalb schreiben wir für die Inverse von A einfach A^{-1} .

Nun ein paar Eigenschaften der Inversen:

Satz II.6: Seien A, B reguläre Matrizen.
Dann gilt:

$$(i) \quad A^{-1} A = I_n$$

$$(ii) \quad A^{-1} \text{ ist invertierbar und } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(iii) \quad I_n \text{ ist invertierbar und } I_n^{-1} = I_n$$

$$(iv) \quad AB \text{ ist invertierbar und } (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(v) \quad A^T \text{ ist invertierbar und } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Bew.: (i) $A (A^{-1} A) \overset{\text{Assoz. von Matmul.}}{=} \underbrace{(A A^{-1})}_{I_n} A = I_n A \overset{\text{Bem. oben}}{=} A I_n \overset{\text{Bem. oben}}{=} A$

Also muss $A^{-1} A = I_n$ sein ✓.

$$(ii) \text{ Aus (i) } A^{-1} A = I_n$$



D.h. A ist Inverse von A^{-1}

Also muss $A = (A^{-1})^{-1}$ ✓.

$$(iii) \quad I_n I_n = I_n$$

↑

D.h. I_n ist Inverse von I_n

Also muss $I_n^{-1} = I_n \quad \checkmark$.

(iv) Probieren wir es

$$I_n = (AB) (AB)^{-1} = (AB) (B^{-1} A^{-1})$$

$$\text{Assoz. Motmol.} \\ = A (B B^{-1}) A^{-1}$$

$$= A I_n A^{-1}$$

$$= A A^{-1} = I_n \quad \checkmark$$

$$(v) \quad I_n = I_n^T = (A^{-1} A)^T = A^T (A^{-1})^T$$

Also ist $(A^{-1})^T$ die Inverse von A^T

und damit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad \checkmark$.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang her mit dem Lösen von LGS und der Inversen:

~ II.8 Buch

Satz II.7: Für jede $n \times n$ Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) A ist invertierbar/regulär
- (ii) Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b}$ lösbar
- (iii) Das homogene LGS $A\vec{x} = 0$ hat nur die triviale Lösung ($\vec{x} = 0$)

Bew.: - Äquivalenz zwischen (i) und (ii) folgt aus den Überlegungen beim Bew. von Lemma II.5

- Äquivalenz zwischen (ii) und (iii) folgt aus Satz I.5.

Orthogonale Matrizen

Sehr nützlich später...

Def.: Eine $n \times n$ Matrix A heisst orthogonal, falls gilt $A^T A = I_n$

II.4 Buch

Satz II.8: Seien A, B orthogonale Matrizen.

Dann gilt:

- (i) A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$
- (ii) A^{-1} ist orthogonal
- (iii) AB ist orthogonal
- (iv) I_n ist orthogonal

Bew.: (i) $A^T A = I_n$
 $\uparrow$
 Inverse von A^T

$$\text{Also } (A^T)^{-1} = A$$

$$\text{Aus Satz II.6(v): } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A$$

$$\text{Und } ((A^{-1})^T)^T = A^{-1} = A^T \quad \checkmark$$

27

(ii) Überprüfe Def. für orthogonale Matrix:

$$\begin{array}{c} (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = A A^{-1} = I_n \checkmark \\ \uparrow \\ A^T \text{ aus (i)} \end{array}$$

(iii) Überprüfe Def.:
Satz II.2 (iii)

$$(AB)^T (AB) \stackrel{!}{=} (B^T A^T) (AB)$$

$$\text{Assoz. Matmult.} = B^T (A^T A) B$$

$$= B^T I_n B$$

$$= B^T B$$

$$\begin{array}{c} B \text{ ortho.} \\ = I_n \checkmark \end{array}$$

$$(iv) I_n^T I_n = I_n I_n = I_n \checkmark$$

Bsp.: (8) Permutationsmatrix

Permutationen der Einheitsmatrix I_n

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^T P = I_3 \dots$$

Wieso Permutationsmatrix?

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Bsp.: (9) Givens-Rotationen (3×3)

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

... orthogonal!

(10) Householder Matrix

Sei $\vec{v}$ ein Spaltenvektor mit n Komponenten
(d.h. eine $n \times 1$ Matrix) und

$$\vec{v}^T \vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2 = 1$$

Dann ist $\vec{v} \vec{v}^T$ eine $n \times n$ Matrix mit

$$(\vec{v} \vec{v}^T)_{ij} = v_i v_j$$

Nun

$$Q = I_n - 2 \vec{v} \vec{v}^T$$

heißt Householder Matrix und

Q ist orthogonal

...

II.4 LR-Zerlegung

Ziel: Matrix-Zerlegung

$P A = L R$
 — obere Dreiecksmatrix /
 — untere Dreiecksmatrix /
 — Linksdreiecksmatrix
 mit Einsen auf Diagonale $\leadsto$ Zeilenstufenform
 $\leadsto$ "Buchhaltungsmatrix"
 der Elementaroperationen um
 A auf Zeilenstufenform
 zu bringen
 Permutationsmatrix, falls man Zeilen vertauschen muss

Oft: im englischen $P A = L U$
 — Lower / Upper triangular matrix

Bsp.: (111) LGS
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \end{aligned}$$

In Matrixform / Matrixschreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto A \vec{x} = \vec{b}$$

Wenden wir das Gauß-Verfahren auf den Hauptteil an:

$$\begin{array}{l} (-2) \\ (+1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{(Zeile 2)} + (-2) \cdot \text{(Zeile 1)} \\ \text{(Zeile 3)} + 1 \cdot \text{(Zeile 1)} \end{array}$$

$$(+3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{(Zeile 3)} + 3 \cdot \text{(Zeile 2)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilenstufenform,}$$

Schreiben wir dies mit Betonung der Zeilenstruktur:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{a}_3^T \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \begin{array}{l} \vec{a}_1^T = (1 \ 1 \ 1) \\ \vec{a}_2^T = (2 \ 1 \ -1) \\ \vec{a}_3^T = (-1 \ 2 \ -3) \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1^T \\ \vec{r}_2^T \\ \vec{r}_3^T \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \begin{array}{l} \vec{r}_1^T = (1 \ 1 \ 1) \\ \vec{r}_2^T = (0 \ -1 \ -3) \\ \vec{r}_3^T = (0 \ 0 \ -11) \end{array}$$

Schreiben wir nun das Gauß-Verfahren mit dieser Notation auf:

$$\vec{r}_1^T = \vec{a}_1^T$$

$$\vec{r}_2^T = \vec{a}_2^T - 2 \cdot \vec{r}_1^T$$

$$\vec{r}_3^T = \vec{a}_3^T + 1 \cdot \vec{r}_1^T + 3 \cdot \vec{r}_2^T$$

Wir können diese Gleichungen umschreiben zu:

$$\vec{a}_1^T = 1 \cdot \vec{r}_1^T$$

$$\vec{a}_2^T = 2 \cdot \vec{r}_1^T + 1 \cdot \vec{r}_2^T$$

$$\vec{a}_3^T = -1 \cdot \vec{r}_1^T - 3 \cdot \vec{r}_2^T + 1 \cdot \vec{r}_3^T$$

Definieren wir nun eine Matrix L mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{l}_1^T \\ \vec{l}_2^T \\ \vec{l}_3^T \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \begin{aligned} \vec{l}_1^T &= (1 \ 0 \ 0) \\ \vec{l}_2^T &= (2 \ 1 \ 0) \\ \vec{l}_3^T &= (-1 \ -3 \ 1) \end{aligned}$$

Dann können wir laut Korollar II.4(ii) schreiben

$$\vec{a}_1^T = \vec{l}_1^T R$$

$$\vec{a}_2^T = \vec{l}_2^T R$$

$$\vec{a}_3^T = \vec{l}_3^T R$$

Oder noch kürzer mit Korollar II.4 (iii):

$$A = LR$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-11) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-11) \\ (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot (-11) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

12.10.16

Vereinbaren wir nun eine Schreibweise.

Die Matrix R ist gerade das Resultat des Gauss-Verfahrens, d.h. sie hat Zeilenstufenform.

Nun: anstelle von den Nullen unter der Diagonalen können wir die Multiplikatoren die bei den Zeilenoperationen auftreten schreiben

Bsp.: (12)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$(13) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

✓

Bis jetzt mussten wir keine Zeilen vertauschen...

Nun kommen Permutationsmatrizen ins Spiel!

Bsp.: (14) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -7 \end{array} \right)$$

$$\uparrow$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Obige Beispiele motivieren nun folgendes
allgemeines Resultat:

Satz II.9: Sei A eine $m \times n$ Matrix.
Dann liefert das Gaußverfahren
eine Zerlegung

$$P A = L R$$

wobei L eine $m \times m$ Matrix mit
Einsen auf der Diagonalen

R eine $m \times n$ Matrix in
Zeilenstufenform

P eine $m \times m$ Permutations-
Matrix

Bem.: (i) L, P sind invertierbar

(ii) Falls R invertierbar ist, dann auch A
und

$$P A = L R \quad | \times P^{-1} \text{ von links}$$

$$A^{-1} = (P^{-1} L R)^{-1} = R^{-1} L^{-1} P$$

↑
Satz II.6 (iv)

Wie löst man LGS mit der LR-Zerlegung?

Bsp.: (15) Betrachte LGS aus Bsp. 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{beide haben} \\ \text{Dreiecksform} \end{array}$$

$$\text{LGS: } A\vec{x} = \underbrace{LR}_{\vec{C}}\vec{x} = \vec{b}$$

In zwei Schritten: (i) löse $L\vec{C} = \vec{b}$

(ii) löse $R\vec{x} = \vec{C}$

$$(i): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \downarrow \text{Vorwärts- einsetzen}$$

$$\leadsto c_1 = 6 \rightarrow c_1 = 6$$

$$2c_1 + c_2 = 1 \rightarrow c_2 = 1 - 2 \cdot c_1 = -11$$

$$-c_1 - 3c_2 + c_3 = -6 \rightarrow c_3 = -6 + c_1 + 3 \cdot c_2 = -33$$

$$(ii): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -33 \end{pmatrix} \quad \uparrow \text{Rückwärts- einsetzen}$$

$$-11x_3 = -33 \rightarrow x_3 = 3$$

$$-1x_2 - 3x_3 = -11 \rightarrow x_2 = +11 - 3x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \rightarrow x_1 = 6 - x_3 - x_2 = 1$$

$$\leadsto \mathcal{L} = \{ (1, 2, 3) \}$$

Was wenn Zeilen zu vertauschen wollen?

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$

$$\underbrace{L}_{\vec{c}} R\vec{x} = P\vec{b}$$

In zwei Schritten: (i) $L\vec{c} = P\vec{b}$

$$(ii) R\vec{x} = \vec{c}$$

Somit haben wir folgendes Verfahren zum systematischen Lösen von LGS:

LR-Algorithmus:

(i) LR-Zerlegung von A : $PA = LR$
(Gaussverfahren)

(ii) Vorwärtseinsetzen: Löse $L\vec{z} = P\vec{b}$

(iii) Rückwärtseinsetzen: Löse $R\vec{x} = \vec{z}$

In I.2 haben wir den Rang eines LGS eingeführt.

Von Führ Matrizen:

Def: Der Rang einer Matrix A ist gleich dem^{des} zugehörigen homogenen LGS $A\vec{x} = 0$.

Man schreibt

$$\text{Rang}(A)$$

Quiz: Was ist der Rang der Matrix

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} \vec{v}^T = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & \dots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & \dots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \dots & v_n v_n \end{pmatrix} ?$$

II.5 Pivotstrategie

Bis jetzt haben wir jedes von null verschiedene Pivot akzeptiert.

In der Praxis ist ein kleiner Pivot aber gefährlich.

Der Grund dafür ist, dass Computer nur mit einer endlichen Genauigkeit arbeiten...

→ Rundungsfehler ...

Bsp.: (16) → Slides Pivotstrategien

Mit sog. Pivotstrategien versucht man den Einfluss von den unvermeidbaren Rundungsfehler zu minimieren.

Eine Möglichkeit: Spaltenmaximumstrategie

↳ Wähle in jedem Eliminationsschritt das (absolut) grösstmögliche Pivot.
 — d.h. mit dem grössten Betrag

19.10.16 Bsp.: (17) → Slides Pivotstrategien