III. Determinanten

Wozu: - um LGS zu diskutieren
- später verwendet für Eigenwerte
- Zusammenhang mit Volumen
↝ Jacobi-Determinante
... Transfomation von Volumenelementen bei mehr-dimensionaler Integration

Ziel: - Determinante über Eigenschaften verstehen
- Determinanten ausrechnen

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine Zahl in welcher eine erstaunliche Menge an Information enthalten ist, z.B. eine Matrix ist invertierbar falls die Determ. nicht Null ist.

Betrachten wir die 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sie "hat" Inverse (Übung)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Das geht nur wenn $ad-bc \neq 0$!

Dies ist gerade die Determinante von A:

$$\det(A) = ad - bc$$

Natürlich hat die Determinante auch einen Zusammenhang mit den Pivots von A:

$$\begin{matrix} \\ \left(-\frac{c}{a}\right) \end{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - b\frac{c}{a} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist gerade das Produkt der Pivots:

$$\det(A) = a \cdot \left(d - b\frac{c}{a}\right) = ad - bc$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten um die Determinante für quadratische Matrizen zu definieren:

(i) Formel $\rightsquigarrow$ Buch LinAlg, Nipp & Stoffer

(ii) Eigenschaften $\rightsquigarrow$ Buch LinAlg, Strang Kap. 5

III.1 Die Eigenschaften der Determinante

Die Determinante einer $n \times n$ Matrix A

$$\det(A)$$

ist (eindeutig) durch folgende 3 Eigenschaften definiert:

(D1) $\det(I_n) = 1$

(D2) $\det(A)$ wechselt das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden

(D3) $\det(A)$ ist linear in jeder Zeile

(i) Ist $\vec{a}_i^T = \vec{b}_i^T + \vec{c}_i^T$, so ist

$$\det\begin{pmatrix} - \vec{a}_1^T - \\ \vdots \\ - \vec{a}_i^T - \\ \vdots \\ - \vec{a}_n^T - \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} - \vec{a}_1^T - \\ \vdots \\ - \vec{b}_i^T - \\ \vdots \\ - \vec{a}_n^T - \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} - \vec{a}_1^T - \\ \vdots \\ - \vec{c}_i^T - \\ \vdots \\ - \vec{a}_n^T - \end{pmatrix}$$

(ii) Ist $\vec{a}_i^{\,T} = \lambda \vec{b}_i^{\,T}$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} - \vec{a}_1^{\,T} - \\ \vdots \\ - \vec{a}_i^{\,T} - \\ \vdots \\ - \vec{a}_n^{\,T} - \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} - \vec{a}_1^{\,T} - \\ \vdots \\ - \vec{b}_i^{\,T} - \\ \vdots \\ - \vec{a}_n^{\,T} - \end{pmatrix}$$

<u>Bsp.:</u> (1) Zu (D1)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

(2) Zu (D2)

$$\det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad$$

$$= -(ad - bc) = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(3) Zu (D3)

$$\text{(i)} \det \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{pmatrix} = (a + a')d - (b + b')c$$

$$= ad - bc + a'd - b'c$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

(ii) $\det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda a d - \lambda b c$

$$= \lambda(ad - bc)$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bem.: (1) Mit (D1) und (D2) können wir bereits det(P) für jede Permutationsmatrix berechnen

P durch Zeilen vertauschen von I_n — gerade: $\det(P) = +1$; ungerade: $\det(P) = -1$

d.h. Anzahl #

(2) Mit (D3)(ii)

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} = \lambda^3$$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}}_{n\times n} = \lambda^n\cdot\det(I_n) = \lambda^n$$

... Zusammenhang mit Volumen ...

(3) Durch (D1), (D2) und (D3) ist die Zahl $\det(A)$ völlig bestimmt

... Aber das ist nicht ganz offensichtlich...

Zuerst wollen wir aus den definierenden Eigenschaften zusätzliche Eigenschaften ableiten.

(D4) Sind zwei Zeilen von A identisch, so gilt

$$\det(A) = 0$$

<u>Bsp.:</u> $\det\begin{pmatrix} a & b\\ a & b\end{pmatrix} = a\cdot b - a\cdot b = 0$ ✓

<u>Allg.:</u> Sei

$$A = \begin{pmatrix} — & \vec{a}_1^{\,T} & — \\ & \vdots & \\ — & \vec{c}^{\,T} & — \\ & \vdots & \\ — & \vec{c}^{\,T} & — \\ & \vdots & \\ — & \vec{a}_n & — \end{pmatrix}$$ (Zeilenschreibweise)

identisch!

Aus (D2): $\det(A) = -\det(A)$

$\rightarrow \det(A) = 0$ ($+0 = -0$ nur für Null!)

(D5) Subtrahiert man ein Vielfaches einer Zeile von einer anderen Zeile, so bleibt $\det(A)$ unverändert

<u>Bsp.:</u> $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-\lambda a & d-\lambda b \end{pmatrix} = a(d-\lambda b) - b(c-\lambda a)$

$= ad - bc - a\cancel{b}\lambda + a\cancel{b}\lambda$

$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ✓.

<u>Allg.:</u> Sei

$$A = \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_j^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_j^T - \lambda \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix}$$

Nur diese Zeile anders!

$$\det(B) \overset{(D3)(i)}{=} \det \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_j^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & -\lambda \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_j^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix} - \lambda \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_i^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^T & - \end{pmatrix}}_{0 \ (D4)}$$

$$= \det(A) \ \checkmark$$

<u>D.h.:</u> Die Determinante ändert sich nicht bei der Anwendung der üblichen Eliminationsschritte im Gaussverfahren nicht

$$A \xrightarrow{\text{Gaussverfahren}} \underbrace{R}_{\text{Zeilenstufenform}}$$

$$\det(A) = \det(R)$$

(D6) Eine Matrix mit einer Nullzeile hat Determinante 0

<u>Bsp.:</u> $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0$ ✓.

<u>Allg.:</u>

$$\det\begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^{\,T} & - \\ & \vdots & \\ - & 0 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^{\,T} & - \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^{\,T} & - \\ & \vdots & \\ - & 0 \cdot \vec{c}^{\,T} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^{\,T} & - \end{pmatrix} \underset{(D3)(ii)}{=} 0 \cdot \det\begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^{\,T} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{c}^{\,T} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n^{\,T} & - \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

(D7) Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

D.h. das Produkt der Einträge auf der Diagonalen

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - b \cdot 0 = ad \; ✓.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = ad - 0 \cdot c = ad \; ✓.$$

Allg.: Aus (D5) wissen wir

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \ulcorner & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lrcorner \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{Nullzeile} = 0 & \text{d.h. } \operatorname{Rang}(A) < n \\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} & \end{cases}$$

durch „totales" eliminieren

$$= d_{11} \cdot \ldots \cdot d_{nn}$$

(D3)(ii) und (D1)

(D8) A singulär, dann $\det(A) = 0$

A regulär / invertierbar, dann $\det(A) \neq 0$

<u>Bsp.:</u> Anfang des Kapitels (und Übung)

<u>Allg.:</u> $A \xrightarrow{\text{Gaussverfahren}} R$ → Nullzeile → singulär → $\det(A) = 0$

→ $\det(A) = \pm \det(R)$

Falls Zeilen vertauschen nötig

(D9) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

<u>Bsp.:</u> $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

$$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$$= \cancel{acef} + adeh + bcfg + \cancel{bdgh}$$

$$- \cancel{acef} - adfg - bceh - \cancel{bdgh}$$

$$= ad(eh-fg) - bc(eh-fg)$$

$$= (ad-bc)\cdot(eh-fg)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

20.10.16

Aus (D9) folgern wir:

$$1 \underset{(D1)}{=} \det(I_n) = \det(A A^{-1}) \underset{(D9)}{=} \det(A) \det(A^{-1})$$

$$\rightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

<u>Bsp.:</u> Von oben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{(ad-bc)^2} \det\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bem. (2) oben !!!

$$= \frac{1}{(ad-bc)^2} (ad-bc) = \frac{1}{ad-bc} \quad \checkmark$$

(D10) Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$

<u>Bsp.:</u> $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$= ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ✓

<u>Allg.:</u>

$$
\begin{tikzcd}
PA = LR \arrow[rr, "T", "\text{Satz II.2}"'] \arrow[d, "\det"] & & A^T P^T = R^T L^T \arrow[d, "\det"] \\
\det(P)\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{1 \ (D7)}\det(R) & & \det(A^T)\det(P^T) = \underbrace{\det(R^T)}_{\det(R)}\underbrace{\det(L^T)}_{1 \ (D7)}
\end{tikzcd}
$$

(Dreiecksmatrizen und Diago. ändern sich nicht beim transponieren!)

$$\det(P)\det(A) = \det(R) \qquad \det(A^T)\det(P^T) = \det(R)$$

P Permutationsmatrix, d.h. $P^T = P^{-1}$ orthogonal!

$\det(P^T) = \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

$$\det(P)\det(A) = \det(A^T)\frac{1}{\det(P)}$$

$$\underbrace{\det(P)^2}_{1,\ \text{da } \det(P) = \pm 1} \det(A) = \det(A^T) \quad \checkmark$$

Bem.: (D10) verdoppelt praktisch die Liste an Eigenschaften

Bsp.: (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \\ 10 & 11 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

A^T hat Nullzeile, also mit (D10) & (D6)

III.2 Berechnung von Determinanten

Die Pivot-Formel

Die LR-Zerlegung liefert

$$PA = LR$$

Mit (D9)

$$\det(PA) = \underbrace{\det(P)}_{\pm 1} \det(A) = \det(LR) = \underbrace{\det(L)}_{(D7)\ 1} \underbrace{\det(R)}_{\substack{r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn} \\ (D7)}}$$

Daraus erhalten wir die Pivot-Formel

$$\det(A) = \frac{\det(R)}{\underbrace{\det(P)}_{\frac{1}{\pm 1} = \pm 1}} = \det(P)\det(R)$$

<u>Bem.:</u> So wird es auf dem Computer gemacht

<u>Bsp.:</u> (5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(D9)}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(D2)} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(D7)}$$

$$= (-1)\cdot(4\cdot 2) = -8$$

(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 8$ (weil zwei Zeilen vertauscht werden müssen um auf Dreiecksform zu kommen)

(7)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \det(R) = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{n+1}{\cancel{n}}$$

$$= n+1$$

Die grosse Formel für Determinanten

Versuchen wir die Formel für die 2x2 Determinante aus den Eigenschaften der Determinanten herzuleiten:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{(D3)(i)}{=} \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\overset{(D3)(i)}{=} \overbrace{\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}}^{0 \text{ z.B. } (D4)} + \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{0 \text{ z.B. } (D4)}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(D3)(ii)}{=} ad \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{+1 \ (D1)} + bc \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1 \ (D2) \ \& \ (D1)}$$

$$= ad - bc \ \checkmark.$$

Die Anwendung der Eigenschaften führt also auf Produkte von Elementen und Determinanten von Permutationsmatrizen.

Genau geht's für 3x3 Matrizen:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightsquigarrow 9 \det(\ ) \ldots \exists \text{ Null}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightsquigarrow 9 \det(\ ) \ldots \exists \text{ Null}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightsquigarrow 9 \det(\ ) \ldots \exists \text{ Null}$$

$= \ldots$ $27 = 3^3$ einfachere Determinanten...

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \overbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{+1} + a_{12}a_{23}a_{31} \overbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{+1} + a_{13}a_{21}a_{32} \overbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{+1}$$

$$+ a_{11}a_{23}a_{32} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1} + a_{12}a_{21}a_{33} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} + a_{13}a_{22}a_{31} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{-1}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ähnlich kann man vorgehen um die Determinante einer $n\times n$ Matrix A zu berechnen:

n Fakultät $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$

$$\det(A) = \text{Summe über alle } n! \text{ Permutationen } P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

$$= \sum \det(P)\cdot a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}$$

Dies ist die grosse Formel für Determinanten. Auch Leibniz-Formel (nach Gottfried Wilhelm Leibniz) genannt.

Bem.: Die Leibniz-Formel eignet sich nicht zum praktischen ausrechnen von Determinanten...
z.B. bei einer 12×12 gibt es
~ 480 Millionen Summanden

Die Kofaktoren Formel

Die Formel für die 3×3 Determinante kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) \\
&\quad - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) \\
&\quad + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\
&= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dies ist die Kofaktoren-Entwicklung nach der ersten Zeile. Ähnlich kann man eine Entwicklung nach der zweiten oder dritten Zeile aufschreiben

Für eine $n \times n$ Matrix A lautet die <u>Kofaktor-formel</u> für die Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \det(A_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \cdot \det(A_{in})$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist die entsteht wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streicht

26.10.16

<u>Bsp.:</u> (8)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aus (D10) $\det(A) = \det(A^T)$ folgt, dass man auch nach Spalten entwickeln kann:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Die Kofaktor-Formel wird auch Laplace'scher Entwicklungssatz (nach Pierre-Simon Laplace) genannt

<u>Bsp.:</u> (9)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Mit Pivot-Formel

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{P} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}^{R}$$

$$\rightsquigarrow \det(A) = \det(P) \cdot \det(R)$$
$$= (-1) \cdot (1 \cdot 5 \cdot 4) = -20$$

- Mit grosser Formel

! geht nur für 3x3 !

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&4\\0&5&6\end{pmatrix} = \begin{matrix}+&+&+&&\\1&2&3&1&2\\0&0&4&0&0\\0&5&6&0&5\\-&-&-&&\end{matrix}$$

(Regel von Sarrus)

$$= 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 5$$

$$- 0\cdot 0\cdot 3 - 5\cdot 4\cdot 1 - 6\cdot 0\cdot 2$$

$$= -20 \checkmark$$

warum? weil viele 0's!

- Mit Kofaktoren nach 2-ter Zeile

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&4\\0&5&6\end{pmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}1&3\\0&6\end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}$$

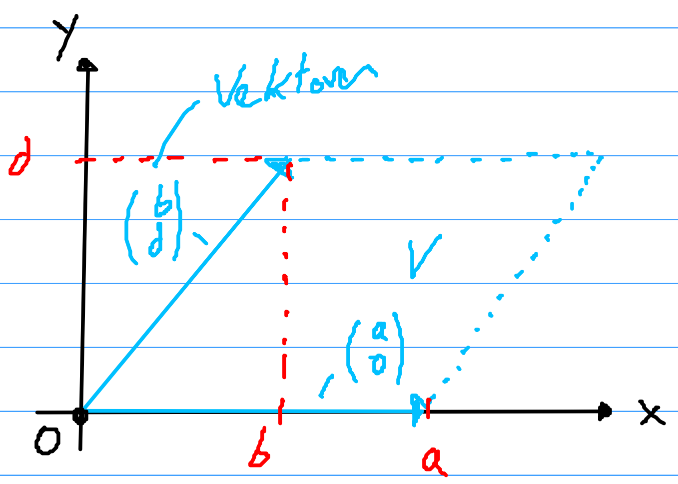
$$= -4\cdot 5 = -20 \checkmark$$

- Mit Kofaktoren nach 1-ster Spalte

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+1}\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{3+1}\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= 1\cdot 1\cdot(-5\cdot 4) = -20 \checkmark.$$

III.3 Determinanten und Volumen

Betrachten wir folgende einfache Situation:



Die Fläche (bzw. 2 dimensionales Volumen) V ist gegeben durch

$$V = a\cdot d$$

Schreiben wir die 2 dimensionalen Koordinaten der aufspannenden Punkte in Vektoren, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Schreiben wir dies in eine Matrix

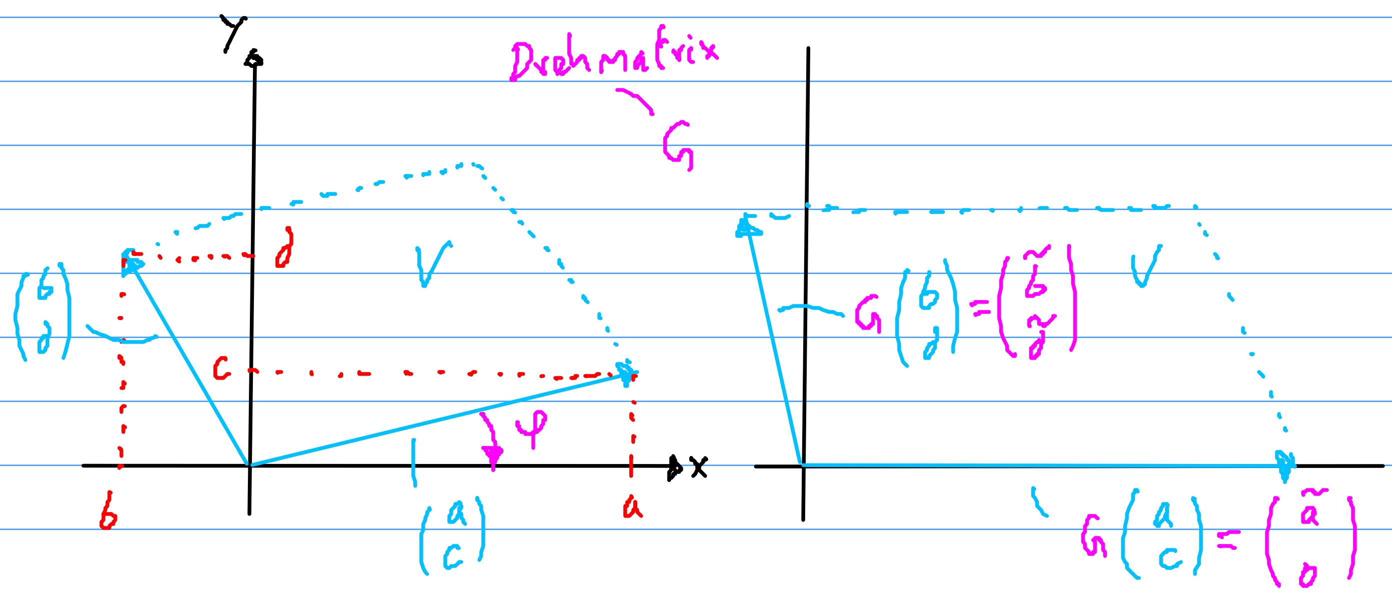
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

und berechnen die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \cdot d = V$$

so erhalten wir auch die Fläche!

Geht das auch allgemein?



$G = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ wie in Übung Serie 4, Aufgabe 4

G ist eine Drehmatrix welche uns auf die gleich einfache Situation wie vorhin führt

$$V = \tilde{a}\,\tilde{d} = \det \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(G\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \; G\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$$

... Spalten Schreibweise des Matrixprodukts!

$$= \det\left(G \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det(G) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \checkmark.$$

Man kann zeigen, dass $\det(A)$ plus oder minus das Volumen des durch die Spalten-Vektoren aufgespannten Parallelipipeds ist.

III.4 Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Die wichtigsten Aussagen über die Lösungsmenge eines LGS in n Unbekannten und n Gleichungen in Abhängigkeit der Determinanten der Koeffizientenmatrix sind:

(i) Falls $\det(A) \neq 0$ hat das homogene LGS $A\vec{x} = 0$ nur die triviale Lösung (d.h. $\vec{x} = 0$)

(ii) Falls $\det(A) = 0$ hat das homogene LGS $A\vec{x} = 0$ unendlich viele Lösungen

(iii) Falls $\det(A) \neq 0$ hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebige rechte Seiten $\vec{b}$ genau eine Lösung

(iv) Falls $\det(A) = 0$ hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ abhängig von der rechten Seiten $\vec{b}$ entweder keine oder unendlich viele Lösungen

⌜Dies kann man leicht aus den Aussagen in diesem Kapitel und dem über LGS folgern...⌟