

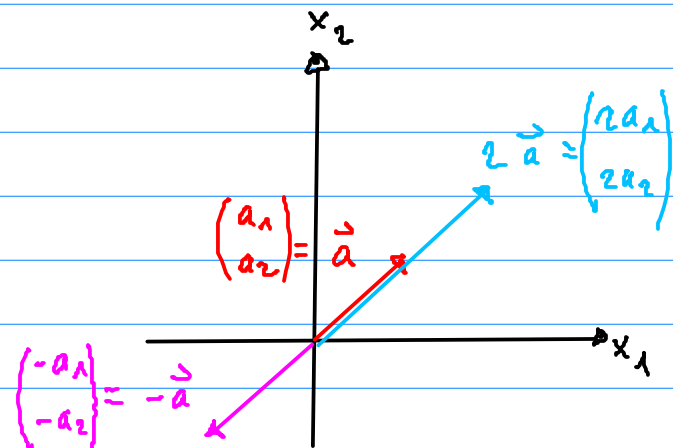
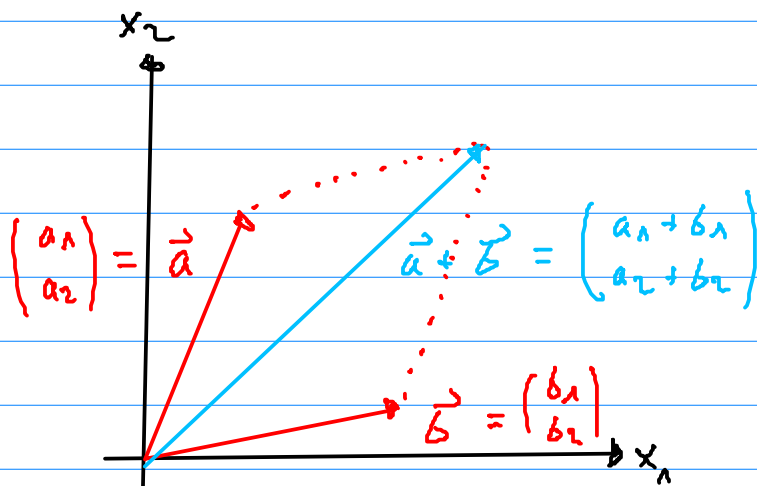
## IV. Vektorräume

Wozu: Weil diese Struktur oft vorkommt

- Lernziele:
- Struktur von Vektorräumen verstehen
  - Definierende Eigenschaften
  - Unterräume
  - Linearkombinationen, Erzeugendensysteme, Basen
  - Normierte Vektorräume  $\leadsto$  Normen  
~ "Längen"
  - Skalarprodukte  $\leadsto$  Winkel, Orthogonalität

### IV.1 Definition und Beispiele

Vektoren der Ebene oder des Raumes sind einem aus der Schule bekannt. Z.B. in der Ebene können wir Vektoren addieren und mit Zahlen multiplizieren:



Wir haben:

$$\vec{a} + \underbrace{(-\vec{a})}_{\text{zu } \vec{a} \text{ entgegengesetzter Vektor}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{Nullvektor}}$$

Die Ebene besteht aus allen (Spalten) Vektoren mit 2 Komponenten.  
Man schreibt

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

weil 2 Komponenten

Ganz gleich geht es für den Raum  $\mathbb{R}^3$  und ganz allgemein

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

D.h. der Raum  $\mathbb{R}^n$  besteht aus allen (Spalten) Vektoren  $\vec{x}$  mit  $n$  Komponenten.

In Kapitel II haben wir gesehen wie man Vektoren addiert und mit Zahlen multipliziert:

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

geometrische  
Bekannte <sup>V</sup>Begriffe in der Ebene oder dem Raum (Länge, Winkel, orthogonal, ...) lassen sich auf  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern.

02.11.16

Analog definiert man Komplexe Vektor:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Addition und Multiplikation mit einer (komplexen) Zahl sind wieder über die Matrixoperationen von Kap. II definiert.

$\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  sind Vektorräume. Allgemein sind Vektorräume (salopp gesagt) Mengen von Objekten mit denen man wie mit Vektoren rechnen kann.

Hierzu ein weniger offensichtliches Beispiel:

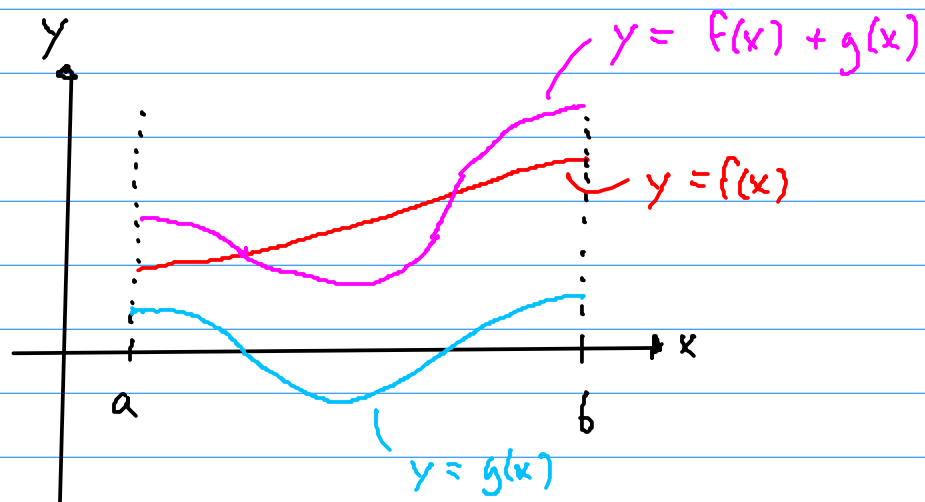
$$C[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \right\}$$

D.h. die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ .

Das C in  $C[a, b]$  steht für continue / continuous

4

Seien  $f, g \in C[a, b]$ , d.h. zwei stetige Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ :



Wir definieren die Addition von  $f$  und  $g$ ,  $f+g$ , auf  $[a, b]$  durch:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$f+g$  ist auch stetig (s. Analysis), d.h.  $f+g \in C[a, b]$ .

Die Multiplikation von  $f$  mit einer Zahl  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , auf  $[a, b]$  durch:

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Auch  $\lambda f \in C[a, b]$ .

5

Auch hier haben wir

$$(f + (-1)f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x)$$

||

-f

entgegengesetzte Funktion

(

Nullfunktion

Ähnliche Eigenschaften wie die Vektoren oben...  
Und  $C[a,b]$  ist auch ein Vektorraum!

Nun aber die abstrakte Definition des Vektorraums (VR)

Def.: Ein reeller Vektorraum  $V$  ist eine Menge von  
Objekten (Vektoren) mit den folgenden  
Operationen

+ (VA) Es ist eine Addition definiert mit

$$a + b \in V \text{ dann auch } a + b \in V$$

(Abgeschlossenheit bez. +)

• (VM) Es ist eine Multiplikation mit reellen  
Zahlen definiert mit

$$\lambda \in \mathbb{R}, a \in V \text{ dann auch } \lambda a \in V$$

(Abgeschlossenheit bez. ·)

Für welche folgende Rechenregeln gelten:

$$(VA1) \quad a + b = b + a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

(VA2)  $(a+b)+c = a+(b+c)$  (Assoziativgesetz)

(VA3) Es gibt einen Nullvektor, der mit 0 bezeichnet wird, und für den gilt:

$$a+0 = a$$

(VA4) Zu jedem Vektor  $a$  gibt es einen entgegengesetzten Vektor, der mit  $-a$  bezeichnet wird, und für den gilt:

$$a+(-a) = 0$$

(VM1)  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

(VM2)  $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

(VM3)  $1a = a$

wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $a, b, c \in V$

Bem.: (i) Ersetze  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$  und erhalte einen komplexen Vektorraum

(ii) Ein Vektorraum wird auch linearer Raum genannt

ist Skalarmultiplikation

(iii) Man schreibt oft  $(V, +, \cdot)$   
 Menge / Add. / Mult. mit Zahl

Aus den definierenden Rechenregeln lassen sich weitere herleiten:

$$(VE1) \text{ Aus } b + a = a \text{ folgt } b = 0 \quad (a, b \in V)$$

$$(VE2) \text{ Für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{0 \in V} \text{ gilt } \alpha 0 = 0 \in V$$

$$(VE3) \text{ Für } \underline{0 \in \mathbb{R}} \text{ und } a \in V \text{ gilt } 0a = 0 \in V$$

$$(VE4) \text{ Für } a \in V \text{ ist } (-1)a = -a$$

↑  
reelle Zahl

Weitere Bsp. für VRe: d.h. endlich  
↓

$$(1) V = \mathcal{L}^2[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$(2) V = \mathbb{P}_n = \{ p(x) \text{ Polynom vom Grad } \leq n \text{ in } x \}$$

(3) Die Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungssystemen bilden einen VR

(4)  $m \times n$  Matrizen

alle Elemente

$$V = \mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R} \right\}$$

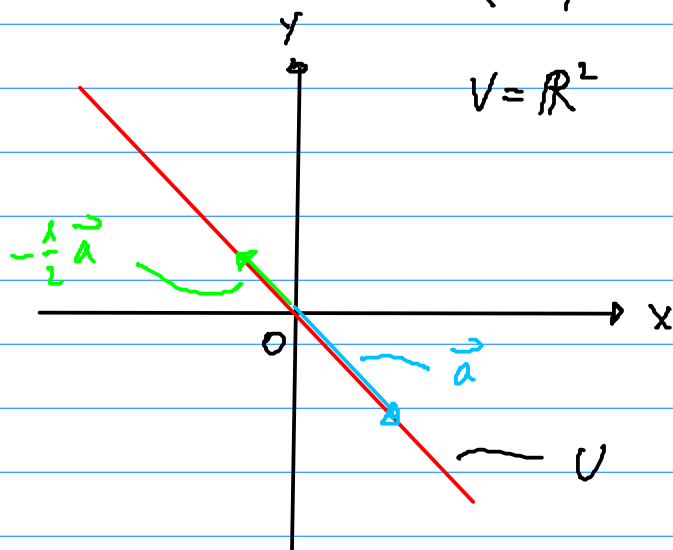
$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} \mid \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m \right\}$$

$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{pmatrix} \mid \vec{a}_1^T, \dots, \vec{a}_m^T \in \mathbb{R}^n \right\}$$

## IV.2 Die Struktur von Vektorräumen

Oft hat man es mit Teilmengen von VRen zu tun: sog. Unterveäume

Bsp.: (1)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$



$$+: \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \in U, \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \in U$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a+b \\ -(a+b) \end{pmatrix} \in U \text{ klar}$$

Abgeschlossen bez. +

$$\therefore \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ -\lambda a \end{pmatrix} \in U \text{ klar}$$

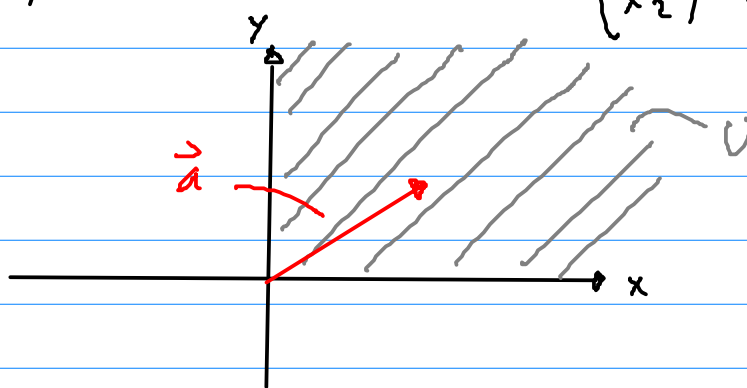
Abgeschlossen bez.  $\cdot$

Es stellt sich heraus, dass  $U$  selbst  
weder in VR ist  
(no Eigenschaften / Regeln überprüfen...)



9

$$(2) V = \mathbb{R}^2, U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$



$$+ : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in U, \text{ d.h. } a_1, a_2 \geq 0$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in U, \text{ d.h. } b_1, b_2 \geq 0$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \in U \text{ klar}$$

Abgeschlossen bez. +

$$\therefore \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \in U ?$$

Nein, nicht wenn  $\lambda < 0$ !

Also nicht abgeschlossen bez. ·

$$(3) V = \mathbb{R}^2$$

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } x_1, x_2 \geq 0 \text{ oder } x_1, x_2 \leq 0 \right\}$$

Abgeschlossen bez. +, · ?

Damit eine Teilmenge eines VR auch ein VR ist, ist es entscheidend das sie abgeschlossen bez. Addition und Multiplikation mit einer Zahl ist. Dies motiviert folgende

Def.: Eine nicht leere Teilmenge  $U$  eines VR  $V$  heisst Unterraum (UR) von  $V$ , falls gilt

(U1) Mit  $a, b \in U$  ist auch  $a + b \in U$

(U2) Mit  $a \in U$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist auch  $\alpha a \in U$

Jeder Unterraum ist selbst auch ein VR.

Warum? 1. Der Unterraum erbt die Addition und Multiplikation mit einer Zahl Operation von  $V$ .

Damit auch die Rechenregeln

(VA1), (VA2), (VM1) - (VM3)

2. Ist der Nullvektor auch in  $U$ ?

Ja, weil für  $a \in U$  und  $\alpha = 0$  - die Null!

$0 \cdot a \in U$  wegen (U2)

Nun ist  $0 \cdot a = 0$  der Nullvektor (VE3)

Ist  $-a \in U$ ? Ja, wegen (U2) und

(VE4)

Bem.: (i) Es gibt zwei triviale URe:

$$U = \{0\} \quad \text{nur der Nullvektor}$$

$$U = V \quad \text{ganze } V$$

(ii) Anstatt  $U$  Teilmenge von  $V$  zu schreiben

$$U \subset V$$

Bsp.: (4)  $V = \mathbb{P}_3 = \{ p(x) \text{ Polynom vom Grad } \leq 3 \text{ in } x \}$

$$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \in \mathbb{P}_3$$

$$q(x) = 1 + 3x \in \mathbb{P}_3$$

$$p(x) + 2 \cdot q(x) = 3 + 7x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \in \mathbb{P}_3$$

$$U = \mathbb{P}_2 = \{ p(x) \text{ Polynom vom Grad } \leq 2 \text{ in } x \}$$

$$\text{Klar: } U \subset V$$

$$(U1): \quad q \in U, r \in U: \quad q+r \in U? \text{ Klar!}$$

$$(U2): \quad q \in U, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda q \in U? \text{ Klar!}$$

(5)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , d.h. VR der  $2 \times 2$  Matrizen

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

(6)  $V = \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , d.h.  $m \times n$  Matrix

$$U = \text{Kern}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = 0 \right\} \subset V$$

D.h. die Menge aller Vektoren die auf Null abgebildet werden

Sei  $\vec{a}, \vec{b} \in U$ , d.h.  $A\vec{a} = 0, A\vec{b} = 0$

$$(U1) \quad A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b} = 0 + 0 = 0$$

$$\text{d.h. } \vec{a} + \vec{b} \in U$$

$$(U2) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad A(\alpha\vec{a}) = \alpha A\vec{a} = \alpha 0 = 0$$

$$\text{d.h. } \alpha\vec{a} \in U$$

Also  $U$  ist VR.

(7)  $V = C[a, b]$  (Menge der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$ )

$$U = C^1[a, b] = \left\{ f \in C[a, b] \mid f \text{ stetig differenzierbar} \right\} \subset V$$

d.h.  $f$  diff'bar und  $f'$  stetig

In Analysis wird gezeigt

$$f+g \in C^1[a,b] \quad \text{und} \quad \alpha f \in C^1[a,b]$$

für  $f, g \in C^1[a,b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Ähnlich  $C^2[a,b]$  (d.h. 2 mal stetig diff'bar)

$\vdots$   
 $C^k[a,b]$  (d.h.  $k$  mal stetig diff'bar)  
 $\vdots$

folge von ineinander liegenden UR.

Für zwei UR  $U_1$  und  $U_2$  eines VR  $V$  gilt:

(UE1) Der Durchschnitt von  $U_1$  und  $U_2$

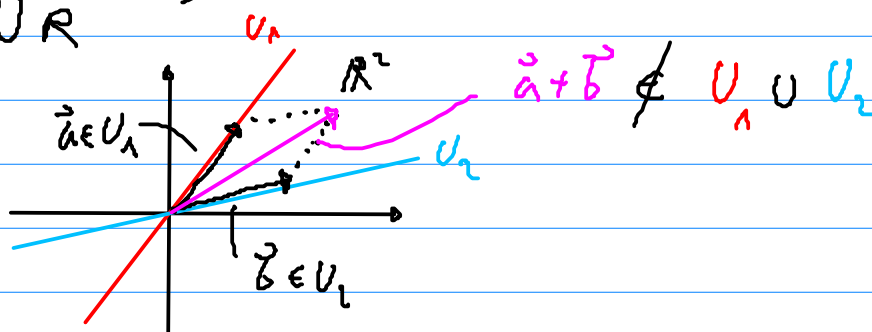
$$U_1 \cap U_2$$

ist auch ein UR

Bsp.:  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $U_1$  Ebene,  $U_2$  andere Ebene  
 durch Ursprung 0!

(UE2) Die Vereinigung von  $U_1$  und  $U_2$  ist kein UR

Bsp.:



In einem VR lässt sich der Begriff der Linearkombination einführen.

Def.: Seien  $a_1, a_2, \dots, a_k$   $k$  Vektoren eines VR  $V$  und  $x_1, x_2, \dots, x_k$  beliebige Zahlen. Dann nennt man den Vektor

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = \sum_{i=1}^k x_i a_i$$

Linearkombination (LK) von Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Gilt für einen Vektor  $b$

$$b = \sum_{i=1}^k x_i a_i$$

so sagt man  $b$  lässt sich als LK von den Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  darstellen oder schreiben.

Bsp.: (8)  $V = P_2 = \{ p(x) \text{ Polynom vom Grad } \leq 2 \text{ in } \}$

$$\begin{aligned} b = 2 + x + 3x^2 &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot x + 3 \cdot x^2 \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_2}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_2}}{x} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_3}}{3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_3}}{x^2} \end{aligned}$$

Def.: Seien  $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ .

Die Menge

$$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \left\{ x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k \mid x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

heisst der von  $a_1, a_2, \dots, a_k$  aufgespannte oder erzeugte UR.

Bem.: (i) In Worten:  $\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ist die Menge aller LK der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$

(ii) Der aufgespannte UR wird manchmal auch die lineare Hülle der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  genannt

(iii)  $\text{span}\{\dots\}$  ist ein UR von  $V$

(iv) Konvention:  $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$

d.h. der Nullvektor kann man "aus dem Nichts" linear kombinieren

Bsp.: (9)  $P_2 = \text{span} \{1, x, x^2\}$  Monome zwei Möglichkeiten

(10)  $P_2 = \text{span} \{1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\}$   $P_2$  aufspannen

Legendre-Polynome

(11)  $V = \mathbb{R}^m$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , d.h.  $m \times n$  Matrix

$$U = \text{Bild}(A) = \{ A \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

$$= \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Spaltenschreibweise

D.h. Menge aller LKs der Spaltenvektoren von  $A$

Def.: Kann jeder Vektor  $b$  ein VR  $V$  als LK der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  von geschrieben werden, so nennt man die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ein Erzeugendensystem (ES) des VR  $V$



Bsp.: (9) & (10) von vorher beides ES von  $\mathbb{P}_2$

$$(12) \quad V = \mathbb{R}^3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ES von } U = \text{Kern}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = 0 \right\}$$

D.h. Lösungen des homogenen LGS  $A\vec{x} = 0$   
bestimmen ... Gaußverfahren

Pivot  $\underbrace{x_1}_{\text{Freie Variable}} \quad \underbrace{x_2}_{\text{Pivotvariable}} \quad \underbrace{x_3}_{\text{Pivotvariable}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 1 & 2 & 7 & -1 \cdot \textcircled{1} \\ -1 & -2 & 1 & +1 \cdot \textcircled{1} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1'} \\ \textcircled{2'} \\ \textcircled{3'} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 4 & -1 \cdot \textcircled{2'} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \cdot \textcircled{2'} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Freie Variable

$$\leadsto x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_2 - x_3 = -2x_2$$

$$4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \leadsto U = \text{Kern}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Es von } \text{Bild}(A) &= \left\{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \right. \\
 &\quad \left. x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Def.: Ein VR  $V$  heisst endlichdimensional, wenn er ein ES besitzt, d.h. Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  mit  $k < \infty$  gibt, so dass

$$V = \text{span} \{ a_1, a_2, \dots, a_k \}$$

Andernfalls heisst der VR unendlichdimensional

Bsp.: (13)  $\mathbb{R}^n$  ist endlichdimensional

$$\mathbb{R}^n = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\left( \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \leftarrow j\text{-te Zeile}$$

(14)  $\mathbb{P}_n$  ist endlichdimensional

$$\mathbb{P}_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

$$(15) C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

D.h. Menge aller stetigen Fkt. auf  $[a, b]$   
ist unendlichdimensional

(16)  $\mathbb{P} = \{\text{Alle Polynome in } x\}$  ist  
unendlichdimensional

09.11.16

Bem.: -  $\mathbb{P}_n$  ist ein endlichdimensionaler UR von  
 $C[a, b]$  und  $\mathbb{P}$

Betrachten wir noch einmal Bsp. (12) von vorher:

$$\text{Bild}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d.h.  $\nearrow$  im Spann von  $\bullet$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hier konnten wir  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  als LK von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

schreiben und diesen Vektor damit aus dem ES von  $\text{Bild}(A)$  streichen.

I.A. gilt: Falls man ein (oder mehrere) der aufspannenden Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  erzeugenden als LK der anderen schreiben kann, dann kann man diesen (oder diese) Vektoren weglassen und trotzdem den selben VR aufspannen/erzeugen

Dies motiviert folgende Def.

Def.: Die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  aus VR  $V$  heissen linear unabhängig (LU), falls aus

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = 0$$

$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$  folgt.

Sonst heissen die  $a_1, a_2, \dots, a_k$  linear abhängig.

Bem.: (i) Die  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sind genau dann LU wenn keiner dieser Vektoren  $\in K$  der anderen ist

(ii) Die  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sind genau dann linear abhängig wenn (mindestens) ein Vektor  $\in K$  der anderen ist

D.h.

$$x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + \color{red}{x_i} a_i + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_k a_k = 0$$

$$\color{red}{a_i} = -\frac{1}{\color{red}{x_i}} \left( x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_k a_k \right)$$

Weil nicht alle  $x_1, x_2, \dots, x_k$  gleich Null  $\Rightarrow$

Bsp.: Nochmal Bsp. (12)

$$\text{Bild}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

linear abhängig

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Linear abhängig? D.h. es gibt  $x_1 \neq 0$  und  $x_2 \neq 0$  mit

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\leadsto x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 7x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

$x_1 = x_2 = 0$  !

Also LU ✓.

$$(17) \mathbb{P}_2 = \text{span} \{ 1, t, t^2 \}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{LU? } x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot t^2 = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$(18) \mathbb{P}_2 = \text{span} \left\{ 1, t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right\}, t \in \mathbb{R}$$

Symbol

$$\text{LU? } x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(19) V = \text{span} \{ 1, \sin(t), \cos(t) \}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{LU? } x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot \sin(t) + x_3 \cdot \cos(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Def.: Seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ein ES für ein VR  $V$ . Falls die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$  sind, so nennt man das ES eine Basis für  $V$ .

Bsp. (17) und (18) zeigen, dass es in endlich dim. VR verschiedene Basen gibt. Da fragt man sich, ob alle Basen dieselbe Anzahl von Vektoren haben

Satz IV.1: Verschiedene Basen für einen VR bestehen aus gleich vielen Vektoren.

Also die Antwort auf vorherige Frage ist ja!

Der Beweis des Satzes IV.1 stützt sich auf folgendes Lemma:

Lemma IV.2: Sei  $V$  ein VR.

Die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  aus  $V$  seien LU, und die Vektoren  $b_1, b_2, \dots, b_l$  seien ein ES von  $V$ . Dann gilt  $k \leq l$ .

Satz IV.1 sagt uns, dass die Anzahl Vektoren in einer Basis eine Eigenschaft des VRs ist.

Def.: Besitzt der VR  $\neq \{0\}$  eine Basis  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , so nennt man  $n$  die Dimension von  $V$ .

Man schreibt  $\dim V = n$

Bem.: (i) Der Nullvektor eines VRs ist immer linear abhängig:

$$\begin{array}{c} x_1 \cdot 0 = 0 \\ \text{Zahl} \quad \text{Nullvektor} \end{array} \quad \text{gilt für alle } x_1 \in \mathbb{R}$$

(ii) Ist ein VR unendlichdimensional, so schreibt man  $\dim V = \infty$

Bsp.: (20)  $\dim \mathbb{R}^n = n$

(21)  $\dim \mathbb{P}_2 = 3$

(22)  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = m \cdot n$

( d.h. VR der reellen  $m \times n$  Matrizen



Satz IV.3: Sei  $V$  ein VR mit  $\dim V = n$ .

Dann gilt:

- (i) Mehr als  $n$  Vektoren sind linear abhängig
- (ii) Weniger als  $n$  Vektoren sind nicht erzeugend
- (iii)  $n$  Vektoren sind genau dann LU, wenn sie erzeugend sind  
(und genau dann bilden sie eine Basis)

Bew.: (i) & (ii) mit Lemma IV.2

(iii) aus (i) und (ii)

### Koordinaten in endlichdimensionalen VRen

Sei  $V$  ein endlichdim. VR mit Basis  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Für jeden Vektor  $x$  in  $V$  gibt es also Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so dass

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Desweiteren sind die  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eindeutig:

$$x = \underbrace{x'_1 a_1 + x'_2 a_2 + \dots + x'_n a_n}_{\text{andere Zahlen}} = \sum_{i=1}^n x'_i a_i$$

Dann

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^n x_i a_i - \sum_{i=1}^n x'_i a_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) a_i$$

Da die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$  eine Basis bilden sind sie L.U. Also muss  $x_i = x'_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) gelten und damit  $x_i = x'_i$ .

Also sind die  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eindeutig.

Def.: Die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  heissen Koordinaten bez. der Basis  $a_1, a_2, \dots, a_n$

Die Koordinaten schreiben wir in einen Spaltenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

den man Koordinatenvektor von  $x$  nennt.

Bem.:

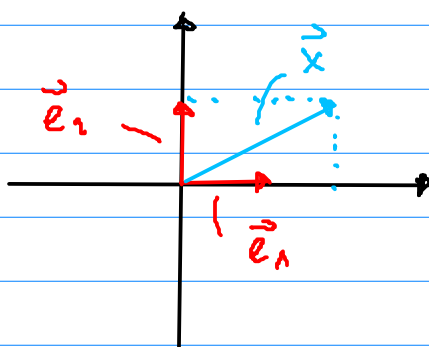
$$\vec{x} \neq x$$

dh. nicht identisch



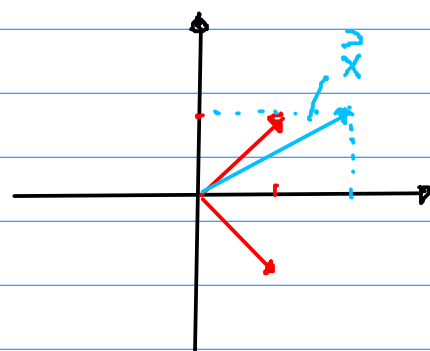
Vektor bzw. Objekt

Koordinatenvektor der abhängig von der gewählten Basis ist

Bsp.: (23)  $V = \mathbb{R}^2$  Ebene

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$      $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  kanonische Basis



$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{3}{2}\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

(24)  $V = \mathbb{P}_2 = \{p(t) \text{ Polynom vom Grad } \leq 2 \text{ in } t\}$ 

$$p(t) = 3 + 2t + t^2$$

Monom Basis:  $a_1 = 1, a_2 = t, a_3 = t^2$ 

$$p(t) = 3a_1 + 2a_2 + 1a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \text{ NEIN! } \text{!!!}$$



Daraus schliessen wir, dass die Addition von Vektoren und das Multiplizieren mit Zahlen von Vektoren mit den zugehörigen Koordinaten äquivalent zu den gewohnten Operationen im  $\mathbb{R}^n$  sind.

Der spezielle VR  $\mathbb{R}^n$  ist eine perfekte Kopie jedes  $n$ -dimensionalen reellen VR  $V$ . Man sagt, der VR  $V$  sei isomorph zum  $\mathbb{R}^n$ .

16.11.16

! gleiche Form

Zwei  $n$ -dimensionale VR unterscheiden sich nur in den Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mathbb{P}_2 & \text{span}\{1, \sin(x), \sin(2x)\}, \dots \\ \mathbb{R}^{m \times n} & \mathbb{R}^{m \times n} & \end{array}$$

Analog ist jeder komplexe  $n$ -dim. VR isomorph zu  $\mathbb{C}^n$ .

Im Fall  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  lassen sich Begriffe wie lineare (Un)Abhängigkeit zurückführen auf das Lösen von LGS.

$n$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$  sind per Def. erzeugend wenn

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \vec{x} \stackrel{\text{Satz II.3}}{=} x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \times n \text{ Matrix}}$

eine Lösung  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  für alle  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  hat.

Aus Korollar I.4 folgt dann:  $r = \text{Rang}(A) = n$

$k$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$  sind per Def. LU wenn

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_k \\ | & & | \end{pmatrix} \vec{x} = 0$$

nur für  $\vec{x} = 0$  gilt.

Dann muss  $r = \text{Rang}(A) = k$  sein (Satz I.2)

d.h. keine freie Variablen und  
deshalb müssen  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$   
sein

Gegeben seien  $k$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ .

Man wähle aus diesen die maximale Anzahl LU Vektoren aus:

Pivot-Spalten von  $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_k \\ | & & | \end{pmatrix}$

Daraus schliessen wir:

Satz IV.4: (i) Der Rang  $r$  einer Matrix  $A$  ist gleich der maximalen Anzahl LVer (Spalten)Vektoren von  $A$

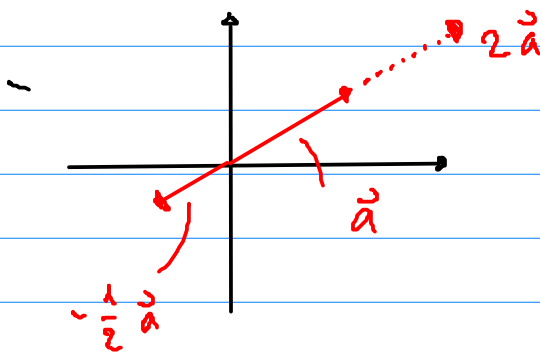
(ii) Der Rang  $r$  einer Matrix  $A$  ist gleich der maximalen Anzahl LVer Zeilen-Vektoren von  $A$

### IV.3 Normierte Vektorräume

Bis jetzt haben wir die allgemeine Struktur von VRen betrachtet. Dabei haben wir uns von der Vektorrechnung in der Ebene und im Raum inspirieren lassen und daraus eine Grundstruktur (d.h. grundlegende Eigenschaften) welche sich auf abstraktere Objekte/Vektoren ( $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{m \times n}$   $m \times n$  Matrizen, Polynome, Funktionen,...) verallgemeinern lässt zusammengestellt.

Nun machen wir dasselbe für den aus der Ebene und dem Raum bekannte Begriff Länge  $\|\vec{a}\|$  eines Vektors  $\vec{a}$ :

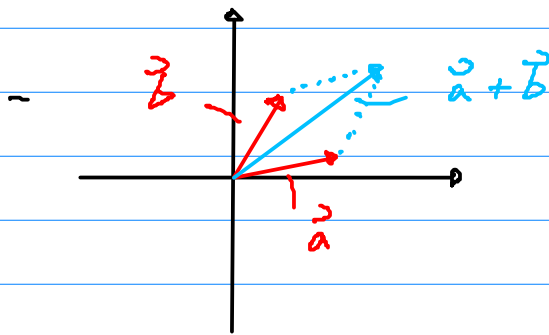
- Länge soll eine nicht negative reelle Zahl sein, d.h.  $\|\vec{a}\| \geq 0$



$$\|2\vec{a}\| = 2 \|\vec{a}\|$$

$$\|-\frac{1}{2}\vec{a}\| = \left| -\frac{1}{2} \right| \|\vec{a}\|$$

(Betrag, Absolutwert)



$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

„Der direkteste Weg ist immer der kürzeste“

so: Dreiecksungleichung

$\Delta$ -Ungleichung,  $\Delta$ -UG

Dies sind die wesentlichen Eigenschaften der Länge. Daraus definieren wir die Länge oder Norm von Vektoren eines VRs.



Def.: Sei  $V$  ein VR. Eine Vorschrift  $\|\cdot\|$ , die jedem Vektor  $a \in V$  eine reelle Zahl  $\|a\|$  zuordnet, heisst Norm (oder Länge), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(N1) (i) Für jeden Vektor  $a \in V$  gilt  $\|a\| \geq 0$   
 (ii) Aus  $\|a\| = 0$  folgt  $a = 0$   
 (Definitheit)

(N2) Für jeden Vektor  $a \in V$  und jede Zahl  $\alpha$  gilt  $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$

(N3) Für alle Vektoren  $a, b \in V$  gilt  
 $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$  (Dreiecksungl.)

Bem.:  $V$  kann ein reeller oder komplex VR sein und in beiden Fällen ist die Norm eine reelle Zahl

Fall  $V$  ein komplex VR ist, bedeutet  $|\alpha|$  der Betrag der komplexen Zahl,  $\alpha = x + iy$   
 $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Bsp.: (25)  $L_p$ -Normen auf  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  ( $p \geq 1$ )

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

wobei  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

Bekannte:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{Summennorm})$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{Euklidische Norm / Länge})$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (\text{Maximumsnorm}) \\ &= \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \end{aligned}$$

(26) Normen auf  $C[a, b]$  (VR der stetigen fkt. auf  $[a, b]$ )

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

(27) Matrizen-Normen  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

## IV.4 Das Skalarprodukt

Nun wollen wir das Skalarprodukt und den Winkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene oder im Raum verallgemeinern auf  $V_{\mathbb{R}}$ . Dazu schauen wir uns wieder ein Paar aus der Schule bekannte Eigenschaften des Skalarprodukts an.

In der Ebene:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$- \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

↪ aus  $\vec{a}, \vec{b}$  macht es eine reelle Zahl  
↪ symmetrisch

$$- \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$

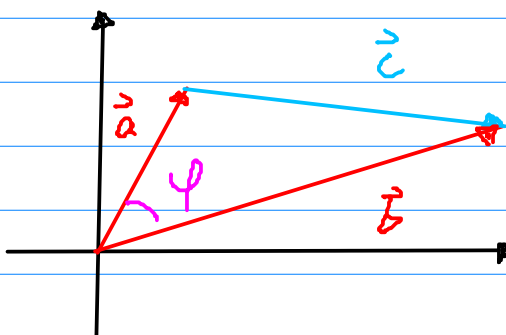
$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$- \underbrace{\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})}_{\text{Zahl}} = a_1 \alpha b_1 + a_2 \alpha b_2$$

$$= \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$- \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|_2^2 \geq 0 \quad \text{Länge}$$

- Winkel:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$



$$\begin{aligned}\|\vec{c}\|_2^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

$$\|\vec{c}\|_2^2 = \|\vec{a}\|_2^2 + \|\vec{b}\|_2^2 - \underline{2\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

Vgl. mit dem Cosinussatz für Dreiecke

$$\|\vec{c}\|_2^2 = \|\vec{a}\|_2^2 + \|\vec{b}\|_2^2 - \underline{2 \cdot \|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2 \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\leadsto \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2 \cdot \cos(\varphi)$$

Insbesondere stehen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht aufeinander wenn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Diese Eigenschaften "inspirieren" nun folgende Formale Def. für VR

Def.: Sei  $V$  ein reeller VR.

Eine Vorschrift  $\langle -, - \rangle$ , die jedem Paar  $x, y$  von Vektoren eine reelle Zahl zuordnet, heisst Skalarprodukt (SP) falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$(S1) (i) \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

für  $x, y, z \in V$

$$(ii) \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

(Linearität im 2. Argument)

$$(S2) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{für } x, y \in V$$

(symmetrisch)

$$(S3) (i) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{für } x \in V$$

$$(ii) \text{ Aus } \langle x, x \rangle = 0 \text{ folgt } x = 0$$

(positiv definit)

Bem.: (i) Aus (S2) folgt sofort auch die Linearität im ersten Argument:

$$\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

(ii)  $\langle -, - \rangle$  heisst Bra-Ket Notation

Andere Notationen:  $(-, -)$  (Buch)

(iii) Für komplexe VR, ersetze (S2) durch

$$(S2') \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \text{für } x, y \in V$$

hier ... komplexe Konjugation

(iv) Ein VR mit einem SP nennt man auch  
Euklidischer VR

Bsp.: (28) (Standard-) Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

(29) Andere SP in  $\mathbb{R}^n$ , z.B.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T D \vec{y}$$

mit  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  und  $d_i > 0$   
( $i=1, \dots, n$ )

(30) SP in  $C[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt, \quad f, g \in C[a, b]$$

Nun können wir in VRen mit einem SP  
definieren, wenn zwei Vektoren senkrecht  
aufeinander stehen bzw. orthogonal

Def.: Zwei Vektoren  $x, y \in V$  heißen orthogonal, falls  $\langle x, y \rangle = 0$ .  
Man schreibt  $x \perp y$ .

Satz IV.5: Sei  $V$  ein VR mit SP.  
Es gilt

$$(i) \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$

(Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)  
CS

(ii)  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $x \in V$ , ist eine Norm,  
die sog. vom SP induzierte Norm

(iii) Gilt  $\langle x, y \rangle = 0$ , d.h.  $x$  und  $y$  orthogonal zueinander, dann gilt

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Satz von Pythagoras)

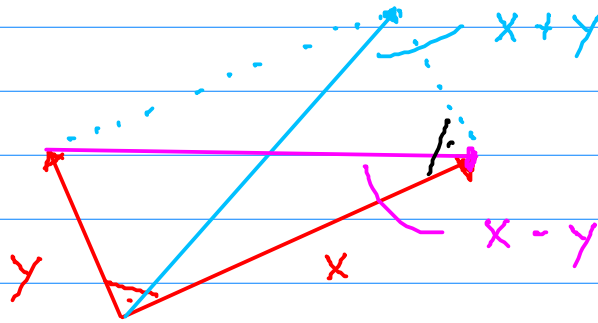
17.11.16

Bem.: (i) Die CS-Ungl. schreibt man manchmal

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

wobei  $\|\cdot\|$  die vom SP induzierte Norm ist

(ii) Illustration zu (iii)



(iii) Winkel zwischen Vektoren  $x, y$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Def.: Ein Vektor  $x$  mit Norm/Länge  $\|x\|=1$  heisst Einheitsvektor.

Bsp.: (31)  $V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

alle Einheitsvektoren

$\varphi \in \mathbb{R}$



Def.:  $k$  Vektoren  $a_1, \dots, a_k$  in einem VR  $V$  mit SP nennt man orthonormal oder ein Orthonormalsystem (ONS), wenn

$$\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Kronecker-Delta

D.h.  $a_i \perp a_j$  für  $i \neq j$  und  $\langle a_i, a_i \rangle = \|a_i\|^2 = 1$

Satz IV. 6: Sei  $V$  ein VR mit SP und  $\dim V = n$ .  
Dann gilt:

(i) Ein ONS ist stets  $LU$

(ii) Ein ONS mit  $n$  Vektoren bilden eine Basis von  $V$ .

Bew.: (i) Sei  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ein ONS

Wir müssen zeigen, dass aus

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = 0 \quad (*)$$

folgt  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ .

Bilde SP von \* und  $a_i$ :

(S1)(ii)

$$0 = \langle a_i, 0 \rangle = \langle a_i, x_1 a_1 + \dots + x_k a_k \rangle$$

(S1)(i)

$$= \langle a_i, x_1 a_1 \rangle$$

+ ...

$$+ \langle a_i, x_i a_i \rangle$$

+ ...

$$+ \langle a_i, x_k a_k \rangle$$

(S1)(ii)

$$= x_1 \langle a_i, a_1 \rangle$$

+ ...

$$+ x_i \langle a_i, a_i \rangle$$

+ ...

$$+ x_k \langle a_i, a_k \rangle$$

ONS

$$= x_i$$

Also  $x_i = 0$  und da  $i = 1, \dots, k$  sind  
alle  $x_1 = x_2 = \dots = 0$

(ii) folgt aus (i) und Satz IV.3

Def.: Eine Basis bestehend aus einem ONS nennt  
man eine orthonormale Basis (ONB)

## Entwicklung nach einer ONB

Sei  $a_1, \dots, a_n$  eine ONB von  $V$  und  
 Sei  $x \in V$ . Da  $a_1, \dots, a_n$  eine Basis ist,  
 können wir auf jeden Fall

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Die Koordinaten  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) bez. der Basis  
 $a_1, \dots, a_n$  erhält man nun einfach durch das  
 SP

$$x_i = \langle a_i, x \rangle$$

Damit erhalten wir die Darstellung/Entwicklung  
 von  $x$  in der ONB

$$x = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \sum_{i=1}^n \langle a_i, x \rangle a_i$$

Bsp.: (32)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ONB?  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \perp V$  klar und  $\|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = 1 \checkmark$ .

Entwickle  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  in  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \sum_{i=1}^2 \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle \vec{a}_i \\
&= \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle \vec{a}_1 + \langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle \vec{a}_2 \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}} \vec{a}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}_2
\end{aligned}$$

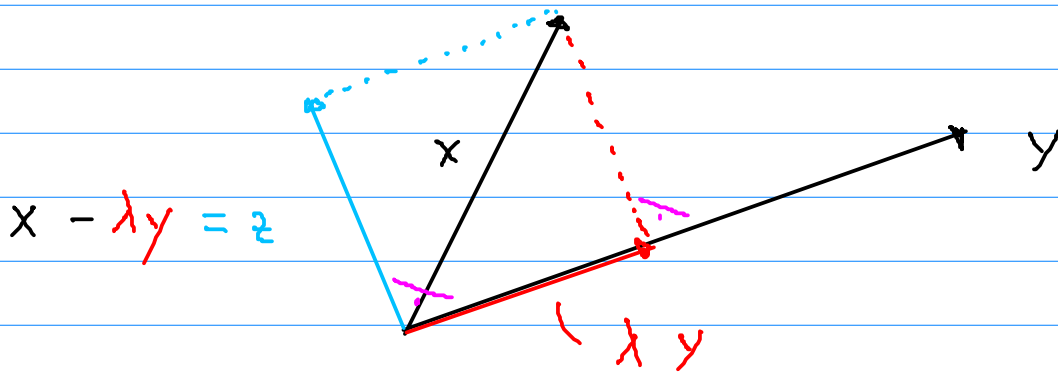
Orthogonale Vektoren sind LU und  
orthonormale Einheitsvektoren sind "ideale" Basis  
Vektoren

Wie macht man aus einer beliebigen Basis  
eine ONB?

# Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungs-Verfahren



Betrachten wir zunächst die einfachere Aufgabe einen Vektor  $x$  auf einen anderen Vektor  $y$  senkrecht zu projizieren



Wir suchen nun  $\lambda$  so, dass  $z \perp y$ :

$$0 = \langle z, y \rangle = \langle x - \lambda y, y \rangle$$

$$0 \stackrel{(5.1)}{=} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, y \rangle$$

Auflösen nach  $\lambda$  ergibt:

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

Und die gewünschte Projektion von  $x$  auf  $y$  ist

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

Mehr noch, aus obigem können wir aus den Vektoren  $x, y$  ein ONS bilden:

$$\textcircled{1} \quad q_1' = y$$

$$q_1 = \frac{y}{\|y\|} \quad \text{Normierung, d.h. } \|q_1\| = 1$$

$$\textcircled{2} \quad q_2' = z = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \quad \perp \text{ auf } y \text{ und } q_1 \quad !$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{\|q_2'\|}$$

Nun  $q_1 \perp q_2$  und  $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$ , d.h. ONS, und sie spannen den selben VR auf wie  $x, y$  !

Die Verallgemeinerung dieser einfachen Prozedur liefert das GS-Verfahren:

Gegeben:  $a_1, \dots, a_k$

Schritte: ①  $q'_1 = a_1$

$$q_1 = \frac{q'_1}{\|q'_1\|}$$

$$\textcircled{2} \quad q'_2 = a_2 - \langle a_2, q_1 \rangle q_1$$

$$q_2 = \frac{q'_2}{\|q'_2\|}$$

$$\textcircled{3} \quad q'_3 = a_3 - \langle a_3, q_1 \rangle q_1 - \langle a_3, q_2 \rangle q_2$$

$$q_3 = \frac{q'_3}{\|q'_3\|}$$

⋮

$$\textcircled{k} \quad q'_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, q_i \rangle q_i$$

$$q_k = \frac{q'_k}{\|q'_k\|}$$

Die  $q_1, q_2, \dots, q_k$  sind ein ONS mit  
 $\text{span}\{a_1, \dots, a_k\} = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$

Bsp.: (33)  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \vec{q}_1' &= \vec{a}_1 \\ \vec{q}_1 &= \frac{\vec{q}_1'}{\|\vec{q}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \vec{q}_2' &= \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 \\ &= \vec{a}_2 - \left( \vec{a}_2^T \vec{q}_1 \right) \vec{q}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0+1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{q}_2 &= \frac{\vec{q}_2'}{\|\vec{q}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \vec{q}_3' &= \vec{a}_3 - \langle \vec{a}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{a}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\ &= \vec{a}_3 - \left( \vec{a}_3^T \vec{q}_1 \right) \vec{q}_1 - \left( \vec{a}_3^T \vec{q}_2 \right) \vec{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{q}_3'}{\|\vec{q}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

