VI Lineare Abbildungen

Ziel: - lineare Abbildungen zwischen VR
- Zusammenhang mit Matrizen und LGS
- Dimensionsformel (für Kern und Bild einer lin. Abb./Matrix)
- Zusammenhang linearer Abbildungen und SP
- Endomorphismen (lineare Selbstabbildungen)
$\rightsquigarrow$ Koordinatentransformation, orthogonale Abbildungen

Nur was wir in Übungen S12A02(6) gesehen haben

In diesem Kapitel untersuchen wir besondere Abbildungen von einem (endlich dim.) VR in einen anderen VR welche die lineare Struktur erhalten

Def.: Eine Abbildung $F: V \to W$ zwischen VRen V und W heisst linear, wenn

(L1) $F(a+b) = F(a) + F(b)$

(L2) $F(\alpha a) = \alpha F(a)$

für alle $a, b \in V$ und Zahlen α ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gilt

30.11.16

Bem.: (i) Eine lineare Abb. nennt man auch Homomorphismus
↘ ~ gleiche / ähnliche Form ⇝ Strukturerhaltend

(ii) Die Menge aller lin. Abb. $L(V,W)$ zwischen zwei VRen ist selbst auch ein VR

Bsp.: (1) Sei $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^m$ und $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ d.h. eine $m\times n$ Matrix

Die Abb. $F: V \longrightarrow W$

$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = A\vec{x}$, $\vec{x}\in V$, $\vec{y}\in W$

ist linear:

$$(L1)\quad F(\vec{a}+\vec{b}) = A(\vec{a}+\vec{b}) \overset{\text{Kap. II}}{=} A\vec{a}+A\vec{b} = F(\vec{a})+F(\vec{b}) \checkmark.$$

$$(L2)\quad F(\alpha\vec{a}) = A(\alpha\vec{a}) \overset{\text{Kap. II}}{=} \alpha A\vec{x} = \alpha F(\vec{a}) \checkmark.$$

wobei $\vec{a},\vec{b}\in V=\mathbb{R}^n$ und $\alpha\in\mathbb{R}$

(2) Sei $V=C[a,b]$ (d.h. Menge der stetigen Fkt. auf $[a,b]$) und $W=\mathbb{R}$

Die Abb. $I: V \longrightarrow W$

$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$

ist linear:

$$(L1)\quad I(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)+g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= I(f) + I(g) \quad \checkmark$$

$$(L2)\quad I(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \alpha\, I(f) \quad \checkmark$$

wobei $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

(3) Sei $V = W = C^\infty[a,b]$ (d.h. Menge der unendlich oft mal stetig diff'baren Fkt. auf $[a,b]$)

Die Abb. $D: V \longrightarrow V$

$$f \longmapsto f' = \frac{df}{dx}$$

ist linear:

$$(L1)\quad D(f+g) = (f+g)' = f' + g' \quad \checkmark$$

$$(L2)\quad D(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' \quad \checkmark$$

wobei $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

Bsp. (1) umfasst im wesentlichen alle linearen Abb. zwischen endlichdim. VRen.

In IV.2 haben uns überlegt, dass jeder n-dimensionale VR isomorph zum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist.

gleiche Form

Ganz ähnlich überlegen wir uns nun, dass alle linearen Abb. durch Matrizen beschrieben werden können.

Sei V VR mit Basis $a_1, a_2, \dots, a_n$ (also $\dim V = n$)

W VR mit Basis $b_1, b_2, \dots, b_m$ BEACHTE! (also $\dim W = m$)

und sei F eine lineare Abb. $F: V \to W$

Jeder Vektor $x \in V$ lässt sich schreiben als

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Koordinaten (Zahlen!)

Koordinaten-Vektor

Wenden wir F nun auf x an:

$$y = F(x) = F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j\right) \overset{(L1)}{=} \sum_{j=1}^{n} F(x_j a_j) \overset{(L2)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j F(a_j)$$

Da jedes $F(a_j) \in W$, kann man es schreiben als

$$F(a_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} b_i \quad \rightsquigarrow \quad \vec{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}$$

Damit

$$y = F(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} b_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_j b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right)}_{y_i} b_i$$

$y_i \leftarrow$ Koordinaten von y in Basis $b_1, b_2, \ldots, b_m$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j \end{pmatrix} = C \vec{x}$$

Matrix mal Vektor! (Kap. II!)

C nennt man die (zu F gehörige) Abbildungsmatrix

Damit haben wir uns überzeugt, dass man lineare Abb. mit Matrizen beschreiben kann. Genau wie bei Koordinaten ändert sich die Matrix (welche die lineare Abb. beschreibt) wenn man die Basen (von V und W) wechselt.

Weiter ist die Menge aller linearen Abb. $L(V, W)$ mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$ isomorph zu der Menge aller $m \times n$ Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$ (welcher ein VR ist und damit auch $L(V,W)$!)

Bsp.: (4) Sei $V = W = \mathbb{P}_2$ (d.h. Menge aller Polynome mit Grad ≤ 2)

und $F: V \longrightarrow W$

Ableitung

$$p(t) \longmapsto q(t) = t \cdot p'(t) + p(t)$$

weil $V = W$!

Nehmen wir die Monom-Basis: $a_1 = b_1 = 1$
$a_2 = b_2 = t$
$a_3 = b_3 = t^2$

und wenden F auf die Basis-Vektoren an:

$$F(a_1) = t \cdot 0 + 1 = 1 = \underset{c_{11}}{1} \cdot b_1 + \underset{c_{21}}{0} \cdot b_2 + \underset{c_{31}}{0} \cdot b_3$$

$$F(a_2) = t \cdot 1 + t = 2t = \underset{c_{12}}{0} \cdot b_1 + \underset{c_{22}}{2} \cdot b_2 + \underset{c_{32}}{0} \cdot b_3$$

$$F(a_3) = t \cdot 2t + t^2 = 3t^2 = \underset{c_{13}}{0} \cdot b_1 + \underset{c_{23}}{0} \cdot b_2 + \underset{c_{33}}{3} \cdot b_3$$

Damit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Prüfungsaufgabe LinAlg. 2016)

VI.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Da lineare Abb. von einem endlichdim. VR zu einem anderen durch das Anwenden von Matrizen auf "gewöhnliche" Vektoren äquivalent ist, beschränken wir uns hier (ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit) auf diese.
D.h. im folgenden sei $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ oder $V = \mathbb{C}^n$ und $W = \mathbb{C}^m$.
Folgende, bereits "angeschnittene" Begriffe (siehe Bsp. (11) und (12) in Kap. IV), welche einen Zusammenhang zwischen linearen Abb. und das Lösen von LGS definieren wir nun.

<u>Def.:</u> Sei F eine lineare Abb. $F: V \to W$ mit Abbildungsmatrix A (d.h. $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$).

(i) Die Menge aller Vektoren die auf Null abgebildet werden,

$$\mathrm{Kern}(A) = \{ \vec{x} \in V \mid A\vec{x} = 0 \},$$

heisst <u>Kern der Matrix</u> A.

(ii) Die Menge aller Bildvektoren,

$$\mathrm{Bild}(A) = \{ \vec{y} \in W \mid \text{Es gibt ein } \vec{x} \in V \text{ mit } \vec{y} = A\vec{x} \},$$

heisst <u>Bild der Matrix</u> A.

<u>Bem.:</u> Betont man die Abbildung anstatt der Abbildungsmatrix, spricht man vom

(i) <u>Kern der Abbildung</u> F

$$\mathrm{Kern}(F) = \{ x \in V \mid F(x) = 0 \}$$

(ii) <u>Bild der Abbildung</u> F

$$\mathrm{Bild}(F) = \{ y \in W \mid \text{Es gibt ein } x \in V \text{ mit } y = F(x) \}$$

01.12.16

Bei diesen Definitionen vermeidet man die Einführung von Koordinaten, sprich es ist eine koordinaten-unabhängige Formulierung. Wie bereits erwähnt, beschränken wir uns hier (zwar unwesentlich) der Konkretheit halber

Betrachten wir nun ein Paar Eigenschaften vom Kern und Bild:

(K1) $\vec{x} \in Kern(A) \iff A\vec{x} = 0$ (Per Definition!)

(B1) $\vec{b} \in Bild(A) \iff A\vec{x} = \vec{b}$ hat (mindestens) eine Lösung

(K2) $Kern(A)$ ist ein UR von $V = \mathbb{R}^n$

(U1) Sei $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Kern(A)$, ist $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in Kern(A)$?

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = 0 + 0 = 0 \text{ JA } \checkmark.$$

(U2) Sei $\vec{x} \in Kern(A)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, ist $\alpha\vec{x} \in Kern(A)$?

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha 0 = 0 \text{ JA } \checkmark.$$

(B2) Bild(A) ist ein UR von $W = \mathbb{R}^m$

(U1) Sei $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in$ Bild(A), ist $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in$ Bild(A)?

Es gibt $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$

(Per Def.!)

Damit

$$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

Also gibt es $\vec{x}_{12}$ mit $A\vec{x}_{12} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$,

nämlich $\vec{x}_{12} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, und damit

$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in$ Bild(A) ✓.

(U2) Sei $\vec{b} \in$ Bild(A) und $\alpha \in \mathbb{R}$, ist $\alpha\vec{b} \in$ Bild(A)?

Es gibt $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$

Damit

$$\alpha\vec{b} = \alpha A\vec{x} = A(\alpha\vec{x})$$

Also gibt es $\vec{x}_\alpha$ mit $A\vec{x}_\alpha = \alpha\vec{b}$,

nämlich $\vec{x}_\alpha = \alpha\vec{x}$, und damit $\alpha\vec{b} \in$ Bild(A) ✓.

(K3) $\dim(\text{Kern}(A)) = n - r$ ⟵ Anzahl freier Parameter

(B3) $\dim(\text{Bild}(A)) = r$ ⟵ Anzahl Pivots (s. auch Satz IV.4 (i))

(K4) $\dim(\mathrm{Kern}(A^T)) = m - r$

(B4) $\dim(\mathrm{Bild}(A^T)) = r = \dim(\mathrm{Bild}(A))$

Aus (K 3/4) & (B3/4) erhalten wir die Dimensionsformeln

(DF1) $\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(V) = n$

(DF2) $\dim(\mathrm{Kern}(A^T)) + \dim(\mathrm{Bild}(A^T)) = \dim(W) = m$

Wie bereits erwähnt, kann man das oben hergeleitete auch auf koordinaten-unabhängige Formulierungen übertragen. z.B die Dim.-Formel unter Betonung der Abbildung F

$$\dim(\mathrm{Kern}(F)) + \dim(\mathrm{Bild}(F)) = \dim(V) = n$$

Ähnlich definiert man den Rang einer linearen Abbildung : $\mathrm{Rang}(F) = \dim(\mathrm{Bild}(F))$

Komposition von linearen Abbildungen

Seien $F: V \to W$ und $G: W \to Y$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist die Komposition $G \circ F$ eine lineare Abb. Die Abbildungsmatrix ist dann gegeben durch das Produkt der

Abbildungsmatrizen von F, A, und G, B:

$$(G\circ F)(\vec{x}) = G(F(\vec{x})) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$$

VI.2 Lineare Abbildungen und Skalarprodukt

Hier untersuchen wir wie die relevanten UR einer lin. Abb. zueinander stehen.
Im Folgenden beschränken wir uns auf reelle VR. Also sei V ein n-dimensionaler reeller VR mit einem SP (also ein euklidischer VR) und sei $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine ONB von V, d.h. $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \le i,j \le n)$. (So eine Basis kann man z.B. mit dem GS-Verfahren bauen)

Sei $x, y \in V$ und berechnen wir das SP

$$\langle x, y\rangle \overset{\text{Entwicklung in Basis}}{=} \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Koord.}}}{x_i}\, a_i\, ,\, \sum_{j=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Koord.}}}{y_j}\, a_j \Big\rangle$$

Koord. in Basis $a_1, \dots, a_n$

$$\overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\langle a_i, a_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{x}^T \vec{y}$$

wobei wir die Koordinatenvektoren bez. der Basis $a_1, \dots, a_n$ eingeführt haben

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

In einer ONB wir das SP zum Standard-Skalarprodukt.

Um die Zusammenhänge zwischen lin. Abb. und dem SP zu erläutern, können wir uns also ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit die VRe $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ mit dem Standard-SP betrachten.

Sei also $F: V \to W$ eine lin. Abb. und A ihre Abbildungsmatrix (bez. ONBen $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$). Betrachten wir nun wie Kern und Bild zueinander stehen.

Sei $\vec{x} \in \mathrm{Kern}(A)$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1^T & - \\ - & \vec{a}_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_m^T & - \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \vec{x} \\ \vec{a}_2^T \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \vec{x} \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\vec{a}_i^T = (a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in})}_{i\text{-te Zeilenvektor von } A}$$

Also jedes $\vec{x} \in \text{Kern}(A)$ steht senkrecht auf jedem Zeilenvektor von A, d.h.

$$\text{Kern}(A) \perp \text{Bild}(A^T)$$

D.h. $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A^T)$ sind zueinander orthogonale UR im $V = \mathbb{R}^n$. Mehr noch, aus (K3) $(\dim(\text{Kern}(A)) = n - r)$ und (B4) $(\dim(\text{Bild}(A^T)) = r)$ folgt, dass $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A^T)$ sog. orthogonale Komplemente im $\mathbb{R}^n$ sind.

Genau gleich sieht man, dass ein Vektor $\vec{x} \in \text{Kern}(A^T)$ senkrecht auf jedem Spalten-Vektor von A ist

$$\text{Kern}(A^T) \perp \text{Bild}(A)$$

Mit (K4) $(\dim(\text{Kern}(A^T)) = m - r)$ und (B3) $(\dim(\text{Bild}(A)) = r)$ folgt auch hier, dass $\text{Kern}(A^T)$ und $\text{Bild}(A)$ orthogonale Komplemente im $\mathbb{R}^m$ sind.

Bsp.: (5) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ die Abb.-Matrix

der lin. Abb. $F : V = \mathbb{R}^{?} \longrightarrow \mathbb{R}^{?}$

Das Gauss-Verfahren angewendet auf A liefert

Pivot-Spalten

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

freie Variablen

$\operatorname{Rang}(A) = \,?$

$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Pivot-Spalten von A

$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{Bild}(A^T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{Kern}(A^T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Die Dimensionsformeln

(DF1) $\underbrace{\dim(\operatorname{Bild}(A))}_{2} + \underbrace{\dim(\operatorname{Kern}(A))}_{2} = \dim(\mathbb{R}^4) = 4 \checkmark$.

(DF2) $\underbrace{\dim(\operatorname{Bild}(A^T))}_{2} + \underbrace{\dim(\operatorname{Kern}(A^T))}_{1} = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \checkmark$.

Man rechnet auch leicht die "Orthogonalitäten" nach ‽

VI.3 Lineare Selbstabbildungen von Vektorräumen

Wir untersuchen hier lin. Abb. von einem VR V in sich selbst, d.h. $W = V$. So eine lin. Abb. nennt man auch Endomorphismus.

innen Gestalt/Form

Def.: (i) Eine Abb. $F: V \to V$ heisst umkehrbar oder invertierbar, falls es zu jedem $y \in V$ ein eindeutiges $x \in V$ gibt mit $y = F(x)$

(ii) Ist F invertierbar, so heisst die Abb. $F^{-1}: V \to V$, welche jedem $y = F(x) \in V$ das eindeutige Urbild x zuordnet, die Umkehrabbildung von F.

Umkehrbare lin. Abb. sind sehr einfach zu charakterisieren:

6.7 in Buch

Satz VI.1: (i) Eine lin. Abb. $F: V \to V$ mit Abb.-Matrix A ist genau dann umkehrbar, wenn A regulär / invertierbar ist

(ii) Ist die lin. Abb. $F: V \to V$ umkehrbar und durch die Abb.-Matrix A beschrieben, so wird F^{-1} durch die Abb.-Matrix A^{-1} beschrieben

<u>Bem.:</u> Ein Umkehrbarer Endomorphismus nennt man auch Automorphismus

selbst — Gestalt/form

Koordinatentransformation

Oft ist es möglich durch eine („geschickte") Koordinatentransformation (KT) ein Problem wesentlich zu vereinfachen. Z.B. können gekoppelte lineare Diff.-Gl. entkoppelt werden ... Mehr dazu im nächsten Kapitel.

07.12.16

Sei V ein VR mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, d.h. für $x \in V$ können wir in der Basis $\mathcal{B}$ schreiben

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Koordinaten in $\mathcal{B}$ — Koord.-Vektor in $\mathcal{B}$

Sei nun $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$ eine andere Basis von V, d.h. $x \in V$ können wir auch in der Basis $\mathcal{B}'$ schreiben dasselbe (wie ↑!)

$$(*) \quad x = x_1' b_1' + x_2' b_2' + \dots + x_n' b_n' = \sum_{j=1}^{n} x_j' b_j' \rightsquigarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Koordinaten in $\mathcal{B}'$ — Koord.-Vektor in $\mathcal{B}'$

Wie bringen wir den Koordinatenvektor $\vec{x}$ in Basis $\mathcal{B}$ in Zusammenhang mit Koordinatenvektor $\vec{x}'$?

Wir schreiben jeden Basisvektor der Basis $\mathcal{B}'$ in der Basis $\mathcal{B}$:

$\mathcal{B}' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$

$$b_j' = \underbrace{t_{1j}\, b_1 + t_{2j}\, b_2 + \dots + t_{nj}\, b_n}_{\text{Koordinaten von } b_j' \text{ in } \mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, b_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Dies setzen wir nun ein in (*)

$$\begin{aligned}
x &= x_1' b_1' + x_2' b_2' + \dots + x_2' b_n' \\
&= x_1' \underbrace{(t_{11} b_1 + t_{21} b_2 + \dots + t_{n1} b_n)}_{b_1'} \\
&+ x_2' \underbrace{(t_{12} b_1 + t_{22} b_2 + \dots + t_{n2} b_n)}_{b_2'} \\
&+ \dots \\
&+ x_n' \underbrace{(t_{1n} b_1 + t_{2n} b_2 + \dots + t_{nn} b_n)}_{b_n'} \\
&= (x_1' t_{11} b_1 + x_2' t_{12} b_1 + \dots + x_n' t_{1n} b_1) \\
&+ (x_1' t_{21} b_2 + x_2' t_{22} b_2 + \dots + x_n' t_{2n} b_2) \\
&+ \dots \\
&+ (x_1' t_{n1} b_n + x_2' t_{n2} b_n + \dots + x_n' t_{nn} b_n)
\end{aligned}$$

$$= \left(t_{11} x_1' + t_{12} x_2' + \ldots + t_{1n} x_n'\right) b_1$$

$$+ \left(t_{21} x_1' + t_{22} x_2' + \ldots + t_{2n} x_n'\right) b_2$$

$$+ \ldots$$

$$+ \left(t_{n1} x_1' + t_{n2} x_2' + \ldots + t_{nn} x_n'\right) b_n$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} t_{1j} x_j'\right)}_{x_1} b_1 + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} t_{2j} x_j'\right)}_{x_2} b_2 + \ldots + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} t_{nj} x_j'\right)}_{x_n} b_n$$

Koordinaten in $\mathfrak{B}$

$$\rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} t_{1j} x_j' \\ \sum_{j=1}^{n} t_{2j} x_j' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} t_{nj} x_j' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \cdots & \vec{t}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \vec{x}\,'$$

$$\vec{x} = T\,\vec{x}'$$

Die Matrix T beschreibt wie man den Koordinatenvektor $\vec{x}'$ in $\mathcal{B}'$ in den Koordinatenvektor $\vec{x}$ in $\mathcal{B}$ transformiert.

Umgekehrt:

$$T^{-1}\vec{x} = \vec{x}'$$

D.h. T^{-1} beschreibt wie man den Koord.-Vektor $\vec{x}$ in $\mathcal{B}$ in den Koord.-Vektor $\vec{x}'$ in $\mathcal{B}'$ transformiert.

Beachte: die Matrix T ist invertierbar, da in ihren Spalten die Basis-Vektoren $\mathcal{B}'$ in den Basis-Vektoren $\mathcal{B}$ geschrieben sind und damit sind die Spalten von T LU. Somit ist T invertierbar!

<u>Def.:</u> Durch die Matrix T wird eine umkehrbare lin. Selbstabb. definiert

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: V &\to V \\ \vec{x}' &\longmapsto \vec{x} = T\vec{x}' \end{aligned}$$

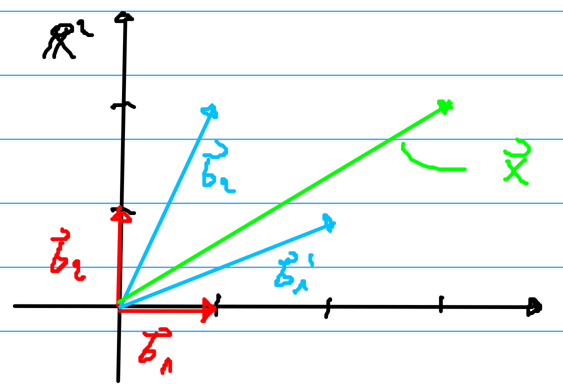
Sie wird <u>Koordinatentransformation</u> genannt. (KT)

Bsp.: (6) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ und

$\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\}$ zwei Basen

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{(Standardbasis)}$$

$$\vec{b}_1' = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$, schreibe $\vec{x}$

in $\mathcal{B}' \rightsquigarrow \vec{x}'$.

Schreibe $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\}$ in $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$:

$$\vec{b}_1' = \underbrace{2}_{= t_{11}} \vec{b}_1 + \underbrace{1}_{= t_{21}} \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_2' = \underbrace{1}_{= t_{12}} \vec{b}_1 + \underbrace{2}_{= t_{22}} \vec{b}_2$$

Also $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= x_1' \vec{b}_1' + x_2' b_2' \\
&= T^{-1} \vec{x} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6-2 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1' \\ x_2' \end{array}
\end{aligned}$$

(7) Sei $V = \mathbb{P}_2$, $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ und $\mathcal{B}' = \{ b_1', b_2', b_3' \}$ zwei Basen:

$b_1 = 1 = b_1' + b_3'$	$b_1' = 1 - t^2 = b_1 - b_3$
$b_2 = t = b_2' - b_3'$	$b_2' = t + t^2 = b_2 + b_3$
$b_3 = t^2 = b_3'$	$b_3' = t^2 = b_3$
$\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ geschrieben	$\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ geschrieben

Damit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schreibe $q(t) = 2 + 3t^2$ in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$:

$$q = 2 \cdot b_1 + 3 b_3 \rightsquigarrow \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q = 2 \cdot b_1' + 5 \cdot b_3' \rightsquigarrow \vec{q}' = T^{-1} \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir untersuchen, wie sich eine KT auf die Abb.-Matrix auswirkt.

Sei $F: V \to V$ eine lin. Abb. mit Abb.-Matrix A in $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, \dots, b_n \}$

$$F: \vec{x} \longmapsto \vec{y} = A \vec{x}$$

Sei $\mathcal{B}' = \{ b_1', b_2', \dots, b_n' \}$ eine andere Basis von V und sei $\tau : V \to V$ die KT zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ mit Matrix T

$$\tau : \vec{x}' \longmapsto \vec{x} = T \vec{x}'$$

Nun wollen wir die Abb.-Matrix A' von F in der Basis $\mathcal{B}'$ schreiben:

$$F: \vec{x}' \longmapsto \vec{y}' = A' \vec{x}'$$

Also

$$\vec{y}\,' = A' \vec{x}\,'$$
$$= T^{-1} A \underbrace{T \vec{x}\,'}_{\vec{x} \text{ in } \mathcal{B}}$$

A in $\mathcal{B}$

$A\vec{x}$ in $\mathcal{B}$

Rücktransformation in $\mathcal{B}'$

Daraus erkennen wir folgende Transformations-Regel bei einem Basiswechsel

KT

$$A' = T^{-1} A \, T$$

Abb.-Matrix in $\mathcal{B}$

Abb.-Matrix in $\mathcal{B}'$

A' beschreibt auch die lin. Abb. F, einfach in einer anderen Basis $\mathcal{B}'$! Dies motiviert folgende Def.

<u>Def.:</u> Ein quadratische $n \times n$ Matrix B heisst <u>ähnlich</u> zu einer quadratischen $n \times n$ Matrix A, falls es eine reguläre $n \times n$ Matrix T gibt mit
$$B = T^{-1} A \, T$$

Orthogonale Abbildungen

Hierzu gab es nur eine Übung
$\rightsquigarrow$ S12A02 (6)

ACHTUNG: die in Kap. $\overline{\text{II}}$ gesehenen orthogonalen Matrizen sind sehr wohl Prüfungsrelevant!