VII. Das Eigenwertproblem

Ziele: – Eigenwerte und Eigenvektoren
– Charakteristisches Polynom und Eigenräume
– Diagonalisierbarkeit
– symmetrische Matrizen
Nicht gemacht → ((– Anwendung auf lineare Diff.-Gl.-Systeme))

Wozu: ⤳ Bsp. – Fachwerk vom Anfang des Semesters
– Tacoma Narrows Bridge, USA, 1940
– Millenium Bridge, London, 2000

VII.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein n-dim. reeller/komplexer VR und F eine lin. Selbstabb.

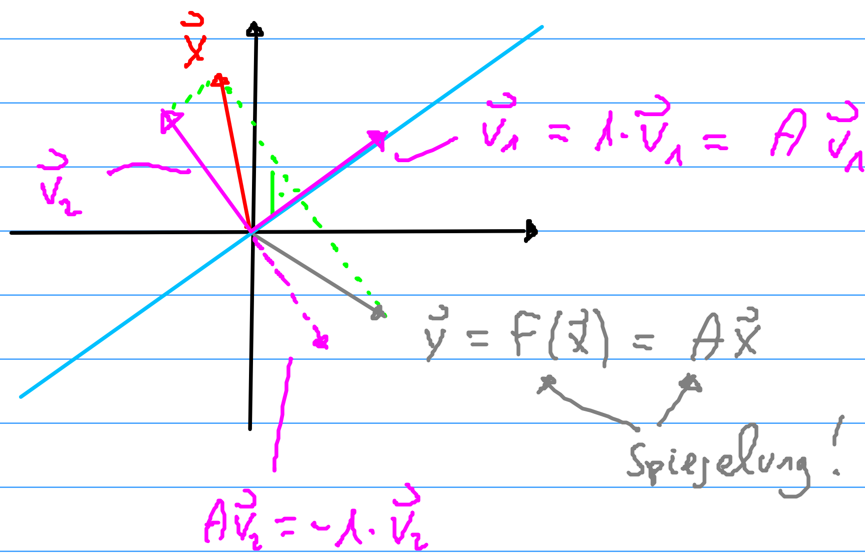
Def.: (i) Unter einem Eigenvektor (EV) von F zum Eigenwert (EW) $\lambda (\in \mathbb{R}, \mathbb{C})$ versteht man einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit

$$F(v) = \lambda v$$

(ii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{C}^{n \times n}$ die Abb.-Matrix von F bez. einer Basis, so versteht man unter einen Eigenvektor (EV) von A zum Eigenwert (EW) λ ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$) versteht man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq 0$, mit

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Bsp.: (1) Spiegelung (Ebene, d.h. $\mathbb{R}^2$)



$\vec{v}_1$ EV zum EW 1

$\vec{v}_2$ EV zum EW -1

Bem.: So eine Spiegelung kann man sich einfach mit Householder-Matrizen bauen

$$A = I - 2\frac{\vec{v}_2 \vec{v}_2^T}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle}$$

Normierung!

13.12.16 (2) eigshow in MATLAB

Kennt man eine Basis von V aus EV $v_1, v_2, \dots, v_n$ und zugehörige EW $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so nimmt die Abb.-Matrix (in dieser Basis) eine besonders einfache Gestalt an

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$
$$F(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$
$$\vdots$$
$$F(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\rightsquigarrow A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

So eine lin. Selbstabb. nennt man diagonalisierbar.

Um EW und EV zu bestimmen gehen wir zurück zur Def.:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$$ Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$!

$$A\vec{v} - \lambda I_n\vec{v} = 0$$ I_n Einheitsmatrix $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{(A - \lambda I_n)}_{n\times n \text{ Matrix}}\vec{v} = 0$$

muss $\neq 0$ sein, (Sonst kein EV!)
d.h. nicht triviale Lösungen!

Nach III.4(ii) muss also

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

sein! Damit

<u>Satz VII.1:</u> Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein EW von A, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

gilt.

Bsp.: (3) Berechnen wir die alle EW der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Davon die Determinante (entwickle nach 1. Spalte)

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\cdot\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 2\right)$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 2\right)$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = P(\lambda)$$

Polynom 3. Grades in λ!

Die EWe sind nun gegeben durch

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

$\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$

3 EWe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Ganz allgmein für $n\times n$ Matrizen kann man sich überlegen, dass $\det(A - \lambda I_n)$ ein Polynom n-ten Grades in λ ist (z.B. mit Kofaktorformel oder der Grossen Formel aus Kap. II)

Def.: Das Polynom n-ten Grades in λ

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

heisst charakteristisches Polynom (CP) der Matrix A.

Def.: Die Menge aller Nullstelle des CPs nenn man das Spektrum von A

der griechische Buchstabe Sigma $\longrightarrow$ $\sigma(A) = \{ \lambda \mid P_A(\lambda) = 0 \}$

Nach dem sog. Fundamentalsatz der Algebra weiss man, dass jedes Polynom n-ten Grades $P(\lambda)$ n (eventuell komplexe und mehrfache) Nullstellen hat, d.h. es kann in n Linearfaktoren zerlegt werden

$$P(\lambda) = \underset{\text{Konstante}}{C} \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{\text{sog. Linearfaktor}}$$

„Mehrfache Nullstelle" bedeutet, dass die λ_j $(j=1,\ldots,n)$ nicht alle verschieden seien müssen.

Def.: Ist λ_* eine k-fache Nullstelle des CP $P_A(\lambda)$ einer Matrix A, so heisst k die algebraische Vielfachheit (AV) von λ_* oder einfach nur k-facher EW von A.

Ein Paar nützliche Eigenschaften des CP sind:

(CP1) Jede $n \times n$ Matrix hat genau n EWe, wenn jeder EW mit seiner AV gezählt wird

(CP2) Schreibt man das CP einer $n \times n$ Matrix in der Form

$$P_A(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + c_1 \lambda + c_0$$

so gilt

(i) $c_n = (-1)^n$

(ii) $c_{n-1} = (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$

$= (-1)^{n-1} \mathrm{Spur}(A)$ ✓ Def. der Spur einer Matrix!

Fehler korr. am 31.01.17

(iii) $c_0 = \det(A)$

<u>Bsp.:</u> (4) zu A aus (3)

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

$$= 2\lambda^2 - 8\lambda + 4 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4$$

SEHR NÜTZLICH ZUM CHECKEN!

$$= \underbrace{(-1)^3}_{-1\ ✓} \lambda^3 + \underbrace{\mathrm{Spur}(A)}_{2+2+2=6\ ✓} \lambda^2 - 10\lambda + \underbrace{\det(A)}_{4\ ✓}$$

So viel zu den EW! Wie bestimmt man die EV? Man geht wieder zurück zur Def.:

$$(A - \lambda I_n)\,\vec{v} = 0$$

Da wir die EW haben, müssen wir (einfach nur!) die Kerne für jeden EW bestimmen

$$\mathrm{Kern}(A - \lambda_j I_n) \rightsquigarrow \mathrm{EV}!$$

<u>Def.:</u> Ist λ ein EW von A, dann heisst

$$E_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda I_n)$$

der Eigenraum von A zum EW λ und

$$\dim(E_\lambda)$$

heisst die geometrische Vielfachheit (GV) des EW λ

<u>Bsp.:</u> (5) Bestimmen wir die EV von A aus (3)

$\underline{\lambda_1 = 2:}$ $\quad E_2 = \mathrm{Kern}(A - 2I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Gauss-Verfahren ...

$$E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 1$$

$\underline{\lambda_2 = 2+\sqrt{2}:}$ $$E_{2+\sqrt{2}} = \text{Kern}\left(A - (2+\sqrt{2}) I_3\right)$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

...

$$E_{2+\sqrt{2}} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 1$$

$\underline{\lambda_3 = 2-\sqrt{2}:}$ $$E_{2-\sqrt{2}} = \text{Kern}\left(A - (2-\sqrt{2}) I_3\right)$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

...

$$E_{2-\sqrt{2}} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 1$$

(6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ EW und EV?

$\lambda = 1$ doppelte Nullstelle
AV = 2

$$P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_3\right) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

$$P_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{EW}$$

$\underline{\lambda_1 = 2:}$ $\quad E_2 = \operatorname{Kern}\left(A - 2 I_3\right)$

$$= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$E_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 2$$

$\underline{\lambda_2 = 4:}$ $\quad E_4 = \operatorname{Kern}\left(A - 4 I_3\right)$

$$= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

...

$$E_4 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 1$$

(7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ EW und EV?

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

$\lambda = 2$ doppelte Nullstelle / AV = 2

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \qquad \text{EW}$$

$\underline{\lambda_1 = 2:}$ $E_2 = \mathrm{Kern}(A - 2I_3)$

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = 2 \neq GV = 1$$

$\underline{\lambda_2 = 1:}$ $E_1 = \mathrm{Kern}(A - I_3)$

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AV = GV = 1$$

15.12.16

Diese Bspe illustrieren folgenden Satz

7.3 in Buch

Satz VII.2: Sei λ_* EW der Matrix A, dann gilt

$$1 \leq GV \leq AV$$

Bew.: s. Buch

Weiter erkennen wir aus den Bspen, dass die EV linear unabhängig sind.

Def.: Eine Basis von EV einer lin. Abb nennt man Eigenbasis

7.4 in Buch

Satz VII.3: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene EW von A und seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ zugehörige EV.
Dann sind die EV linear unabhängig.

Wie sieht es aus bei $AV > 1$?

7.5 in Buch

$\dim(E_{\lambda_1})$ ...

Satz VII.4: Seien $g_1, g_2, \dots, g_k$ die GV zu den paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.
Dann sind diese $g_1 + g_2 + \dots + g_k$ Vektoren linear unabhängig

Folgerung: Gilt für eine lin. Selbstabb. $AV = GV$, so gibt es eine Eigenbasis

Def.: Quadratische Matrizen zu denen es eine Eigenbasis gibt nennt man

(i) Einfach, falls $AV = GV = 1$

(ii) Halbeinfach, falls $AV = GV$

für jeden EW gilt

Bem.: Jede einfache Matrix ist auch halbeinfach

Wie bereits in der Kap.-Einleitung erwähnt, hat die Abb.-Matrix einer linearen Selbst-Abb. eine besonders einfache Gestalt in einer Eigenbasis: Diagonal

VII.2 Diagonalisierung

Def.: Eine quadratische Matrix heisst diagonalisierbar, falls es eine reguläre Matrix T gibt, so dass die Matrix
$$D = T^{-1} A T$$
eine Diagonal-Matrix ist

Im Prinzip ist das Diagonalisieren einer lin. Selbstabb. bzw. ihrer Abb.-Matrix (bez. einer Basis) nur eine Koordinatentransformation in deren Eigenbasis.

Sei A mit EW $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und die Eigenbasis aus zugehörigen EV $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ gegeben.

Nun bauen wir die KT, d.h. wir stellen die reguläre Matrix T auf:

QUIZZ: Wieso?

$$T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$ (Spaltenschreibweise!)

die EV in den Spalten

ACHTUNG auf Reihenfolge!

Die Inverse T^{-1} schreiben wir

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} - & \vec{w}_1^T & - \\ - & \vec{w}_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{w}_n^T & - \end{pmatrix} \quad \text{(Zeilenschreibweise)}$$

Da $T^{-1} T = I_n$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}\right)!$ muss gelten

$$\vec{w}_i^T \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Berechnen wir nun die Einträge der Matrix $D = T^{-1} A T$:

$$(D)_{ij} = (T^{-1} A T)_{ij}$$

$$AT = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \vec{w}_i^T A \vec{v}_j \qquad = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \vec{w}_i^T \lambda_j \vec{v}_j \qquad \text{Satz II.3(iii)}$$

$\in \mathbb{K}$, also nur Zahl!

$$= \lambda_j \underbrace{\vec{w}_i^T \vec{v}_j}_{\delta_{ij}} = \begin{cases} \lambda_j & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Also

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren: (1) EW bestimmen

CP $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

aufstellen und Nullstellen suchen

(2) EV bzw. Eigenräume bestimmen

Basis zu

$$E_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda I_n)$$

berechnen

(3) Falls es eine Eigenbasis gibt, kann man A diagonalisieren

$$T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

EV passend zu den EW

$$T^{-1} = (\ldots)$$

berechnen

<u>Bsp.:</u> (8) A aus Bsp. (3), (5)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

AV = 1 = GV

EW: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{2}$

EV: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -\sqrt{2}/4 & 1/4 \\ 1/4 & \sqrt{2}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(9) A aus Bsp. (6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EW: $\underbrace{\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 1}_{\text{AV = 2 = GV}}$, $\lambda_3 = 4$ AV = 1 = GV

EV: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(10) A aus Bsp. (7) QUIZZ ?

ABER trotzdem empfehlenswert !

In der OPTIONALEN Serie 14 gibt es eine Aufgabe mit komplexen EW und EV. Hierzu ein Bsp.

Bsp.: (11) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

① EW bestimmen

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad (\text{d.h. } \lambda^2 = -1)$$

Keine reellen Lösungen, aber komplexe:

$$\lambda_1 = i \,, \quad \lambda_2 = -i$$

imaginäre Einheit hier UND nicht Index !

② EV bzw. Eigenräume bestimmen

$\underline{\lambda_1 = i:}$ $E_i = \text{Kern}\,(A - i\,I_2)$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Gauss-Verfahren

Pivot

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} (-i) \quad \text{, d.h. } ② + (-i)\cdot ① \text{ Zeile}$$

Freie Variable

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-i x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = i x_2$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda_2 = -i:}$ $E_i = \text{Kern}\,(A - (-i)\,I_2)$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

③ $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

VII.3 Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen

Häufig hat man es mit reellen symmetrischen Matrizen, d.h. $A^T = A$, zu tun und deren EW und EV haben spezielle Eigenschaften. Diese sind

Satz VII.5: Sei A eine reelle symmetrische Matrix ($A^T = A$).

Dann gilt:

(i) Alle EW sind reell

(ii) EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander

(iii) A ist halbeinfach und somit diagonalisierbar

<u>Folgerung:</u> - Wegen (ii) kann man die EV zu verschiedenen EW orthonormal wählen (durch einfaches normieren!)

- Wegen (iii) ist die AV = GV und man kann den Eigenraum E_λ zum EW λ (mit AV = GV > 1) mit einer ONB versehen (GS-Verfahren!)
- Daraus schliessen wir, dass die Eigenbasis als ONB gewählt werden kann und damit

$$D = T^{-1} A T = T^{T} A T$$

weil T orthogonal ist wenn die Eigenbasis die in ihren Spalten stehen eine ONB bilden!

Bsp.: (12) Nochmal A aus Bsp. (3), (5), (8)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch } \checkmark.$$

EW: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$

alle reell $\checkmark$.

EV: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ Normierung $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

bilden ONB $\checkmark$.

$$\rightsquigarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(13) Nochmal A aus Bsp. (6), (9)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch} \checkmark.$$

EW: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 4$

$$\text{EV}: \quad \underbrace{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{GS}}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2{}' = \vec{v}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{v}_2 \rangle \vec{q}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\, 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{q}_2{}'}{\|\vec{q}_2{}'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Und

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ ONB $\checkmark$.

$$\rightsquigarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = T^{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

21.12.16