P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung
Sommer 2016

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	19.08.2016	

1	2	3	4	5	6	Total
7P	11P	10P	11P	8P	13P	60P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Lineares Gleichungssystem mit Parameter [7 Punkte]

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,4}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 6\alpha \\ 4 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

(1a) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des obigen Gleichungssystems.

Lösung: Wir machen Zeilenumformungen wie folgt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6\alpha & 15 \\ 4 & 7 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \to \mathrm{I}/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 6\alpha & 15 \\ 4 & 7 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 6\alpha & 15 \\ 0 & -1 & 0 & -16 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}/(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2\alpha & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -16 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2\alpha & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2\alpha-16 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}/(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2\alpha & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\alpha-16}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{III},\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4-\frac{2\alpha-16}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\alpha-16}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2\alpha+68}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\alpha-16}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right). \quad \textbf{[4 Punkte]}$$

Somit lautet die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2\alpha+68}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\alpha-16}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right).$$

(1b) [1 Punkt] Was ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir sehen, dass die Zeilenstufenform aus Teilaufgabe a) drei linear unabhängige Spalten aufweist und deswegen Rang 3 hat, unabhängig von α. **[1 Punkt]**

(1c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für alle möglichen Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung: Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\tfrac{4}{3} + \tfrac{2\alpha+68}{3}\gamma, 1 - 16\gamma, \tfrac{4}{3} + \tfrac{16-2\alpha}{3}\gamma, \gamma\right) : \gamma \in \mathbb{R}\right\}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 2 Kurzaufgaben [11 Punkte]

Stellen Sie (wie bei allen anderen Aufgaben) jeweils Ihren Lösungsweg klar dar.

(2a) [2 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für zwei stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ ist die Additionsvorschrift $+$ wie gewöhnlich punktweise definiert:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso ist die skalare Multiplikationsvorschrift $\cdot$ für einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ punktweise gegeben:

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Menge $\left\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1\right\}$ ein Unterraum von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist.

Lösung: Die Menge ist kein Unterraum. **[1 Punkt]** Wir nehmen beliebige $f, g \in C(\mathbb{R})$ so, dass $\int_0^1 f(x)dx = 1$ und $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Dann gilt für $h := f + g$, dass

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 1 + 1 = 2, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

aufgrund der Linearität der Integration. Somit ist $f + g$ nicht in der Menge enthalten und die Menge somit kein Vektorraum.

(2b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3, \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

oder alternativ auch mithilfe der Regel von Sarrus.

(2c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Lösung: Wir berechnen

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{-5+1} \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

(2d) [2 Punkte] Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$ so, dass das Gleichungssystem $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine Lösung hat. Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{C})$.

Lösung: Da $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine Lösung hat, gilt $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{C}) = m$. **[0.5 Punkte]** Weiter gilt nach der in der Vorlesung behandelten Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{C}) + \dim \operatorname{Bild}(\mathbf{C}) = n. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Daher gilt $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{C}) = n - m$. **[1 Punkt]**

(2e) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2},$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit und folgern Sie, ob $\mathbf{D}$ diagonalisierbar ist oder nicht.

Lösung: Wir berechnen

$$\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}) = (8 - \lambda)(4 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = (\lambda - 6)^2.$$

Also hat $\mathbf{D}$ nur den Eigenwert $\lambda = 6$ **[1 Punkt]** mit algebraischer Vielfachheit 2. **[0.5 Punkte]** Des weiteren gilt

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{D} - 6 \cdot \mathbf{I}) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\},$$

also hat der Eigenwert $\lambda = 6$ geometrische Vielfachheit 1. **[0.5 Punkte]** Weil die Summe aller geometrischen Vielfachheiten kleiner als 2 ist (oder auch, weil aus den Eigenvektoren von $\mathbf{D}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ gebildet werden kann), ist $\mathbf{D}$ nicht diagonalisierbar. **[1 Punkt]**

Aufgabe 3 Lineare Polynomabbildung [10 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, 2x^2-1, x^2-3x+2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F} \colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, die für alle $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p'(x) - \left(\int_0^1 p(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x^2$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

(3a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist.

Lösung: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\alpha_1(x-1) + \alpha_2(2x^2-1) + \alpha_3(x^2-3x+2) = 0.$$

Daraus folgt

$$(2\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 - 3\alpha_3)x - \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$

Weil $\mathcal{B}_1$ linear unabhängig ist, folgt

$$2\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 - 3\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$

Addieren der zweiten und der Hälfte der ersten Gleichung auf die dritte ergibt $-\frac{\alpha_3}{2} = 0$, also $\alpha_3 = 0$, womit aus der ersten und zweiten Gleichung ebenso folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Damit ist $\mathcal{B}_2$ linear unabhängig. **[1 Punkt]** Weil $\mathcal{B}_2$ drei Elemente umfasst und $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, folgt, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist. **[1 Punkt]**

Alternativ überprüft man, dass die Koordinatenmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vollen Zeilen- bzw. Spaltenrang hat, **[2 Punkte]** woraus folgt, dass $\mathcal{B}_2$ erzeugend bzw. linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist.

(3b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

Lösung: Es gilt für alle $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\alpha, x \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}[\mathcal{F}(p + \alpha \cdot q)](x) &= p'(x) + \alpha \cdot q'(x) - \left(\int_0^1 p(y)\,\mathrm{d}y + \alpha \cdot \int_0^1 q(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x^2 \\ &= p'(x) - \left(\int_0^1 p(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x^2 + \alpha \cdot \left(q'(x) - \left(\int_0^1 q(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x^2\right) \\ &= [\mathcal{F}(p)](x) + \alpha \cdot [\mathcal{F}(q)](x). \quad \textbf{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung.

(3c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Lösung: Es gilt

$$\mathcal{F}(1) = -x^2, \qquad \mathcal{F}(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2, \qquad \mathcal{F}(x^2) = 2x - \tfrac{1}{3}x^2.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

(3d) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id})$, die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$ überführt.

Lösung: Es ist einfach abzulesen, dass

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

(3e) **[2 Punkte]** Sei $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ das Polynom, das die Koordinaten $(2,0,1)^\top$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ besitzt. Bestimmen Sie mithilfe der Teilaufgaben (3c) und (3d) die Koordinaten von $\mathcal{F}(q) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

Lösung: Die gesuchten Koordinaten berechnet man via

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id})\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Lineare Rekursion [11 Punkte]

Nehmen wir an, wir befinden uns in einer menschlichen Zelle, die drei verschiedene Arten A, B und C von Molekülen herstellen kann. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Anzahl an produzierten Molekülen der jeweiligen Art n Sekunden nach Messbeginn mit a_n, b_n und c_n. Diese Bestände von Molekülen folgen für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Gesetzmässigkeit

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\,a_n + 3\,b_n + 3\,c_n, \\ b_{n+1} &= 3\,a_n + 4\,b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= 3\,a_n + b_n + 4\,c_n. \end{aligned}$$

Bei Messbeginn befindet sich ein Molekül des Typs B, aber keines der Typen A und C in der Zelle, also $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ und $c_0 = 0$. Im Folgenden sei

$$\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(4a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$, für die $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ gilt, und geben Sie einen Ausdruck für $\mathbf{x}_n$ in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{x}_0$ an.

Lösung: Wir sehen, dass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aus $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ folgt ausserdem, dass $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$. **[1 Punkt]**

(4b) [6 Punkte] Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine *orthogonale* Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3,3}$, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}.$$

Tipp: Die Zahlen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 8$ sind Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$.

Lösung: Seien $\lambda_1 := -1$, $\lambda_2 := 8$ und $\mathbf{v}_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir rechnen nach, dass

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{v}_3. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Daraus folgt, dass zum Eigenvektor $\mathbf{v}_3$ der Eigenwert $\lambda_3 := 3$ gehört. Ausserdem sehen wir, dass

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \textbf{[1.5 Punkte]}$$

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \quad \textbf{[1.5 Punkte]}$$

Daraus ist ersichtlich, dass zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gehören. Weil die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, stehen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ bereits orthogonal zu einander und wir müssen sie nur noch normieren, um drei orthonormale Vektoren zu erhalten. Wir berechnen $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{3}$ und $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}$. Damit ist die Matrix

$$\mathbf{S} := \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \,\middle|\, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \,\middle|\, \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

orthogonal, und mit der Matrix

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{\top}.$$

(4c) **[3 Punkte]** Geben Sie eine explizite Formel zur Berechnung von c_n an, die nur von n abhängt.

Lösung: Aus Teilaufgabe (4a) und der Orthogonalität von $\mathbf{S}$ folgt, dass

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{\top})^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{S}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{\top}\mathbf{x}_0, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

also

$$\begin{aligned} c_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{\sqrt{6}} \\ \frac{8^n}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3^n}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{6} + \frac{8^n}{3} - \frac{3^n}{2}. \quad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Lineare Regression [8 Punkte]

In der (x, y)-Ebene seien vier Datenpunkte (x_i, y_i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, gegeben durch

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline y_i & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}.$$

Es soll nun ein Kreis mit Mittelpunkt (u_1, u_2) durch diese Datenpunkte gelegt werden, der in der (x, y)-Ebene der Funktionsgleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,u_1 x - 2\,u_2 y - 1 = 0$$

genügt.

(5a) [2 Punkte] Auf welches überbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ führt die Berechnung des Kreismittelpunktes?

Lösung: Wir sehen, dass für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $2\,u_1 x_i + 2\,u_2 y_i = (x_i)^2 + (y_i)^2 - 1$, also folgt mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[1 Punkt]} \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

dass $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ verlangt ist.

(5b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die beste Wahl $(u_1^\star, u_2^\star)$ für den Kreismittelpunkt im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

Lösung: Wir lösen die zum Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ zugehörigen Normalengleichungen. Dazu berechnen wir erst einmal

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[1 Punkt]} \qquad \mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

und folgern dann mittels Gauss, dass

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 10 \\ -4 & 24 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\to\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 10 \\ 0 & 22 & -9 \end{array}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Daraus folgt, dass $u_2^\star = -\frac{9}{22}$ und $u_1^\star = \frac{10}{8} + \frac{1}{2}u_1^\star = \frac{5}{4} - \frac{9}{44} = \frac{23}{22}$, also

$$\begin{pmatrix} u_1^\star \\ u_2^\star \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 23 \\ -9 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(5c) [2 Punkte] Angenommen, Sie würden die sparsame $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{A}$ kennen. Leiten Sie eine Formel für $(u_1^\star, u_2^\star)$ her, die nur von $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{b}$ abhängt.

Tipp: (Zur Erinnerung.) Mit der sparsamen $\mathbf{QR}$-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ bezeichnen wir die $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{B}$, für die $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt.

Lösung: Sei $\mathbf{u} = (u_1^\star, u_2^\star)^\top \in \mathbb{R}^2$ und sei $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{4,2}$ orthonormale Spalten hat und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2,2}$ invertierbar ist. Aus den Normalengleichungen $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}$ folgt $\mathbf{R}^\top\mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{R}^\top\mathbf{Q}^\top\mathbf{b}$, **[1 Punkt]** und folglich $\mathbf{u} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\top\mathbf{b}$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 6 Legendre-Polynome [13 Punkte]

Sei $\mathcal{P}([-1,1])$ der Vektorraum *aller* Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$ (er enthält also Polynome von beliebig hohem Grad) ausgestattet mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dadurch induzierten Norm $\|\cdot\|$, die für alle $f,g\in\mathcal{P}([-1,1])$ durch

$$\langle f,g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\| \coloneqq \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

gegeben sind. Ausserdem bezeichnen $p_0,p_1,p_2,\ldots\in\mathcal{P}([-1,1])$ die Monome, das heisst, für alle $j\in\mathbb{N}_0$, $x\in[-1,1]$ gilt $p_j(x)=x^j$.

Wir betrachten die Polynome $q_0,q_1,q_2,\ldots\in\mathcal{P}([-1,1])$, die durch Anwendung des Gram-Schmidt-Algorithmus auf $p_0,p_1,p_2,\ldots$ (in dieser Reihenfolge!) entstehen. Oftmals werden die Polynome $q_0,q_1,q_2,\ldots$ Legendre-Polynome genannt.

Sie dürfen in dieser Aufgabe für jedes $k\in\mathbb{N}_0$ verwenden, dass $\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_k([-1,1])$ ist (wobei hier $\mathcal{P}_k([-1,1])$ wie gewohnt den Vektorraum der Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich k bezeichnet).

(6a) [5 Punkte] Berechnen Sie die ersten drei Legendre-Polynome q_0, q_1 und q_2.

Lösung: Berechnung von q_0:

$$\|p_0\|^2 = \langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2 \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\Rightarrow q_0 = \frac{p_0}{\|p_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Berechnung von q_1:

$$\langle p_1,q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\Rightarrow \tilde{q}_1 = p_1 - \langle p_1,q_0\rangle\, q_0 = x, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\|\tilde{q}_1\|^2 = \langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\Rightarrow q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Berechnung von q_2:

$$\begin{aligned}
\langle p_2, q_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3},\\
\langle p_2, q_1\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = 0 \quad \textbf{[0.5 Punkte]}\\
\Rightarrow \tilde{q}_2 &= p_2 - \langle p_2, q_0\rangle\, q_0 - \langle p_2, q_1\rangle\, q_1 = x^2 - \frac{1}{3} \quad \textbf{[0.5 Punkte]}\\
\|\tilde{q}_2\|^2 &= \left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right)\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \quad \textbf{[0.5 Punkte]}\\
\Rightarrow q_2 &= \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}
\end{aligned}$$

(6b) **[2 Punkte]** Zeigen Sie mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass q_n ein Polynom vom Grad n ist.

Lösung: Teilaufgabe (6a) impliziert die Aussage für $n \in \{0, 1, 2\}$. **[0.5 Punkte]** Sei also $n \in \mathbb{N}$ und nehmen wir an, dass für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ gilt, dass $q_k(x)$ ein Polynom vom Grad k ist. Aus der Definition des Gram-Schmidt-Algorithmus folgt, dass es eine Zahl $c \in (0, \infty)$ gibt, so dass

$$q_{n+1} = c \cdot \left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle x^{n+1}, q_k\rangle\, q_k\right). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Weil die Summe rechts ein Polynom vom Grad höchstens n **[1 Punkt]** und $c > 0$ ist, muss q_{n+1} ein Polynom vom Grad $n + 1$ sein. Induktion vervollständigt den Beweis.

(6c) **[2 Punkte]** Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}_{n-1}([-1, 1])$, dass

$$\langle q_n, f\rangle = 0.$$

Lösung: Seien $f \in \mathcal{P}_{n-1}([-1, 1])$ und $f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k q_k(x). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgrund der Orthogonalität der Legendre-Polynome folgt, dass

$$\langle q_n, f\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \langle q_n, q_k\rangle = 0. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(6d) **[4 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Rekursion von der Form

$$q_{n+1} = (\alpha_n x + \beta_n) q_n + \gamma_n q_{n-1}$$

mit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Tipp: Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $x \cdot q_n$ und untersuchen Sie dessen Koordinaten bezüglich der Basis $\{q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}\}$ von $\mathcal{P}_{n+1}([-1, 1])$. Verwenden Sie ausserdem ohne Beweis, dass $\langle x \cdot q_n, q_{n+1} \rangle \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie Teilaufgaben (6b) und (6c).

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund von Teilaufgabe (6b) ist xq_k ein Polynom vom Grad $k + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ **[1 Punkt]**. Aus der Orthonormalität der Legendre-Polynome und Teilaufgabe (6c) folgt deshalb

$$\begin{aligned} xq_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \langle xq_n, q_k \rangle \, q_k \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \langle q_n, xq_k \rangle \, q_k \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \langle q_n, xq_{n-1} \rangle \, q_{n-1} + \langle q_n, xq_n \rangle \, q_n + \langle q_n, xq_{n+1} \rangle \, q_{n+1}. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$q_{n+1} = \tfrac{1}{\langle q_n, xq_{n+1} \rangle} \big((x - \langle q_n, xq_n \rangle) q_n - \langle q_n, xq_{n-1} \rangle \, q_{n-1} \big) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

und beendet damit den Beweis.