R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung

		Note
Name		
Vorname		
Leginummer		
Datum	18.08.2017	

1	2	3	4	5	Total
10P	10P	10P	10P	10P	50P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Wahr-und-falsch [10 Punkte]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so: wahr falsch

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch. Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein wir runden auf 0 auf.

		wahr	falsch
a)	Es seien $\boldsymbol{v_1}$,$\boldsymbol{v_2}$ zwei Eigenvektoren der Matrix A. Dann ist auch $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$ ein Eigenvektor von A.		
b)	Seien A_1,A_2,A_3 drei linear unabhängige Matrizen in Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, so dass $A_1\boldsymbol{v} + A_2\boldsymbol{v} + A_3\boldsymbol{v} \neq 0$.		
c)	Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.		
d)	Die Polynome $\{(2x+2)^2, 2x^2+2, (x-1)(x+1)\}$ erzeugen $\mathbb{P}_2$.		
e)	Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für alle $n \times n$ Matrizen.		
f)	Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.		
g)	Es gibt eine Matrix mit charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda$, welche invertierbar ist.		
h)	$\det(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T) = 0$ wobei $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.		
i)	Es gibt eine Basis $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1$ und $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$, wobei die norm $\|\cdot\|$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert wird.		
j)	$A \mapsto A^T$ ist eine lineare Abbildung und die symmetrischen Matrizen bilden einen Eigenraum davon.		

Aufgabe 2 Orthonormal-Projektion [10 Punkte]

Wir betrachten den Unterraum

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$ mit den Standardskalarprodukt.

(2a) [3 Punkte] Wir bezeichnen mit $U_\perp$ das orthogonale Komplement zu U in $\mathbb{R}^4$, d.h. die Menge aller Vektoren von $\mathbb{R}^4$ welche senkrecht auf U stehen.

Bestimmen Sie $U_\perp$.

Lösung: Die beiden gegebenen Vektoren sind linear unabhängig. Daher gilt das $\dim(U) = 2$, was impliziert $\dim(U_\perp) = 2$. Sei (a_1, b_1, c_1, d_1) und (a_2, b_2, c_2, d_2) eine Basis von $U_\perp$, dann gilt das folgende Gleichungssystem für $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} a_i + c_i = 0 \\ 2a_i + 2b_i + 2c_i + d_i = 0 \end{cases}$$

das heisst

$$\begin{cases} a_i = -c_i \\ 2b_i = -d_i \end{cases}$$

Eine Wahl für die Basis wäre $(1, 0, -1, 0)^\top$ und $(0, 1, 0, -2)^\top$. Dann

$$U_\perp = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2b) [3 Punkte] Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^4$ welche ausschliesslich Vektoren aus U respektive $U_\perp$ enthält.

Lösung: Sei $e_1^P := e_1 = (1, 0, 1, 0)^\top$, dann ist $e_1^N = \frac{e_1^P}{\|e_1^P\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^\top$ normiert. Sei $e_2 = (2, 2, 2, 1)^\top$. Nach dem Gram-Schmidt-Verfahren,

$$\begin{aligned} e_2^P &= e_2 - \langle e_2, e_1^N \rangle e_1^N \\ &= (0, 2, 0, 1)^\top, \end{aligned}$$

und $e_2^N = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Sei $e_3 = (1, 0, -1, 0)^\top$. Da $e_3 \in U_\perp$, gilt, dass $e_3^P = e_3$ und $e_3^N = \frac{e_3^P}{\|e_3^P\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^\top$. Sei $e_4 = (0, 1, 0, -2)^\top$. Da $\langle e_3, e_4 \rangle = 0$, gilt, dass $e_4^P = e_4$ und $e_4^N = \frac{e_4^P}{\|e_4^P\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})^\top$. Daher ist eine mögliche Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

(2c) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf U an.

Lösung: Die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{x}$ auf U ist

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{x}, e_1^N \rangle e_1^N + \langle \boldsymbol{x}, e_2^N \rangle e_2^N \\ =&\frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ =&(\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})^\top. \end{aligned}$$

(2d) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf $U_\perp$ an.

Lösung: Die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{x}$ auf U ist

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{x}, e_3^N \rangle e_3^N + \langle \boldsymbol{x}, e_4^N \rangle e_4^N \\ =&\frac{7}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ =&(\frac{7}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{2}{5})^\top. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Kern und Bild [10 Punkte]

Wir betrachten folgende Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1+\alpha & -1-\alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1+4\alpha & 5+\alpha \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(3a) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von α.

Lösung: Um den Kern von A zu finden, lösen wir die Gleichung $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$, das heisst

$$\begin{aligned} (1+\alpha)x_1 + (-1+\alpha)x_2 + (-1-\alpha)x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -3x_1 + (-1+4\alpha)x_2 + (5+\alpha)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Gauss-Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\alpha & -1+\alpha & -1-\alpha & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1+4\alpha & 5+\alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1-\alpha) \\ \\ (3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8+4\alpha & 2+\alpha & 0 \\ 0 & \text{-4-2}\alpha & 0 & 0 \end{array}\right) (2) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & -4-2\alpha & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Falls $\alpha = -2$, gilt, dass

$$\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \mathrm{Span}\{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\},$$

andernfalls ist Ker$\boldsymbol{A}$ = $\{0\}$, Im$\boldsymbol{A}$ = $\mathbb{R}^3$. Um Im$\boldsymbol{A}$ zu berechnen, wenn $\alpha = -2$, benutzen wir Gauss-Elimination angewendet auf $\boldsymbol{A}^\top$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \text{-1} & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-3) \\ (1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

was bedeutet, dass

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{A} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

(3b) **[2 Punkte]** Geben Sie $\dim(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A}))$ an.

Lösung: Von der Lösung zu (3a), ist es einfach zu sehen, dass

- dim(Ker($\boldsymbol{A}$))=0, dim(Im($\boldsymbol{A}$))=3 if $\alpha \neq -2$.
- dim(Ker($\boldsymbol{A}$))=2, dim(Im($\boldsymbol{A}$))=1 if $\alpha = -2$.

(3c) **[2 Punkte]** Für welche Werte von α ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar?

Lösung: Dass $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist, ist äquivalent zu dim(Ker($\boldsymbol{A}$))=0, das heisst $\alpha \neq -2$.

Aufgabe 4 Vektorraum der Polynome [10 Punkte]

Sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F : &\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 \\ &p(t) \mapsto (t^2 - 3)p''(t) + p'(t) - 3p(0) \end{aligned}$$

(4a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung: We have

$$\begin{aligned} F(1) &= -3 \\ F(t) &= 1 \\ F(t^2) &= 2t^2 + 2t - 6 \end{aligned}$$

so the matrix corresponding to F is

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4b) [4 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von F.

Lösung: Berechne die Lösung der folgenden Gleichung, um die Eigenwerte von $\boldsymbol{F}$ zu erhalten

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -6 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\lambda(2-\lambda) = 0$$

das heisst $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$ sind die drei Eigenwert von $\boldsymbol{F}$.

Für $\lambda_1 = -3$

$$(\boldsymbol{F} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_2 = x_3 = 0.$$

Also ein möglicher Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$ ist $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 0)^\top$.

Für $\lambda_2 = 0$,

$$(\boldsymbol{F})\boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Also ein möglicher Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$ ist $\boldsymbol{e_2} = (1, 3, 0)^\top$.

Für $\lambda_3 = 2$,

$$(\boldsymbol{F} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Also ein möglicher Eigenvektor zum Eigenwert$\lambda_3 = 1$ ist $\boldsymbol{e_3} = (-1, 1, 1)^\top$.

(4c) **[4 Punkte]** Berechnen Sie $F^n(p(t))$ für $p(t) = 2 + 7t + t^2$ und $n \geqslant 1$.

Lösung: Bemerke, dass

$$F(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}) = (\boldsymbol{e_1}\ \boldsymbol{e_2}\ \boldsymbol{e_3})\boldsymbol{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

für $\boldsymbol{e_1} = 1$,$\boldsymbol{e_2} = t$,$\boldsymbol{e_3} = t^2$ the basis of $\mathbb{P}^2$. Das heisst, dass

$$F^n(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}) = (\boldsymbol{e_1}\ \boldsymbol{e_2}\ \boldsymbol{e_3})\boldsymbol{F}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Als Folge von (4b) haben wir schon die Zerlegung für $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$, wo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^n &= \boldsymbol{PA}^n\boldsymbol{P}^{-1}p \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daher gilt $F^n(2 + 7t + t^2) = (-3)^n - 2^n + 2^n t + 2^n t^2$ für $n \geqslant 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 Kleinequadrate [10 Punkte]

Für die Grösse b wird ein Modell der Form $b = a_1X + a_2Y + a_3Z$ angenommen. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ nach der Methode der kleinsten Quadrate mit den Werten aus folgender Tabelle

X_i	Y_i	Z_i	b_i
-1	2	0	4
-1	0	2	2
2	-1	0	-2
2	0	-1	0
0	-1	2	-2
0	2	-1	4

Lösung:

Gesucht wird die Lösung $\boldsymbol{x}$ der Normalengleichung $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A^TA = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -4 \\ -4 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 & -10 \\ -4 & 10 & -4 & 20 \\ -4 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & -2 & 10 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2/5) \\ (2/5) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21/5 & -14/5 & 8 \\ 0 & -14/5 & 21/5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21 & -14 & 40 \\ 0 & -14 & 21 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2/3) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21 & -14 & 40 \\ 0 & 0 & 35/3 & 20/3 \end{pmatrix}$$

und durch Rückwärtseinsetzen schliesslich $a_1 = 1/7,\ a_2 = 16/7,\ a_3 = 4/7$