R. Käppeli
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung

Winter 2016
Typ A

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	03.02.2017	

1	2	3	4	5	Total
10P	10P	10P	10P	10P	50P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Wahr oder falsch? [10 Punkte]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. Setzen Sie Kreuzchen in die entsprechenden Kästchen, und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Nicht gelöste Teilaufgaben ergeben 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein – ein einem solchen Fall runden wir die Gesamtpunktzahl immer auf 0 Punkte auf.

		wahr	falsch
a)	Die Polynome $\{x^2+1, x(x+1), x+1, x-1\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 sind linear unabhängig.		
b)	Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar, so ist es auch $\mathbf{A}^4$.		
c)	Hat eine reelle (2×2)-Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 2, so ist $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.		
d)	Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, die durch $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M})_{i,j}$ für alle $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben ist, ist linear.		
e)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ regulär.		
f)	Wenn die Matrix $\mathbf{C}$ diagonalisierbar ist, so ist auch ihre Transponierte $\mathbf{C}^\top$ diagonalisierbar.		
g)	Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist $\mathbf{w}\mathbf{w}^\top$ eine Matrix mit Rang n.		
h)	Sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Falls $\det(\mathbf{D}) \neq 0$ ist, so bilden sowohl die Spalten- als auch die Zeilenvektoren von $\mathbf{D}$ jeweils eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.		
i)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 8 & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ ist nicht für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar.		
j)	Jede quadratische Matrix, bei der auf der Diagonalen nur Einsen und oberhalb der Diagonalen nur Nullen stehen, ist invertierbar.		

Lösung: Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **[1 Punkt]**, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt **[-1 Punkt]**. Nicht gelöste Teilaufgaben ergeben **[0 Punkte]**. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein – ein einem solchen Fall runden wir die Gesamtpunktzahl immer auf **[0 Punkte]** auf.

		wahr	falsch
k)	Die Polynome $\{x^2+1, x(x+1), x+1, x-1\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 sind linear unabhängig.		$\times$
l)	Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar, so ist es auch $\mathbf{A}^4$.	$\times$	
m)	Hat eine reelle (2×2)-Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 2, so ist $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.	$\times$	
n)	Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, die durch $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M})_{i,j}$ für alle $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben ist, ist linear.	$\times$	
o)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ regulär.		$\times$
p)	Wenn die Matrix $\mathbf{C}$ diagonalisierbar ist, so ist auch ihre Transponierte $\mathbf{C}^\top$ diagonalisierbar.	$\times$	
q)	Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist $\mathbf{w}\mathbf{w}^\top$ eine Matrix mit Rang n.		$\times$
r)	Sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Falls $\det(\mathbf{D}) \neq 0$ ist, so bilden sowohl die Spalten- als auch die Zeilenvektoren von $\mathbf{D}$ jeweils eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.	$\times$	
s)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 8 & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ ist nicht für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar.		$\times$
t)	Jede quadratische Matrix, bei der auf der Diagonalen nur Einsen und oberhalb der Diagonalen nur Nullen stehen, ist invertierbar.	$\times$	

Aufgabe 2 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung [10 Punkte]

Oft ist eine lineare Abbildung nicht direkt durch eine Matrix, sondern durch andere Operationen beschrieben. Als Beispiel dafür betrachten wir in dieser Aufgabe für einen fixierten Vektor $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$\mathcal{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{für die gilt} \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Hierbei steht $\times$ für das Vektorprodukt, welches für zwei Vektoren $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right), \mathbf{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben ist.

(2a) **[2 Punkte]** Überprüfen Sie, dass es sich bei $\mathcal{F}$ um eine lineare Abbildung handelt.

Lösung: Es ist zu zeigen, dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{y}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \alpha\,\mathcal{F}(\mathbf{y}). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Wir rechnen also für alle $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \mathbf{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ nach, dass gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} a_2(x_3 + \alpha y_3) - a_3(x_2 + \alpha y_2) \\ a_3(x_1 + \alpha y_1) - a_1(x_3 + \alpha y_3) \\ a_1(x_2 + \alpha y_2) - a_2(x_1 + \alpha y_1) \end{pmatrix} \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2y_3 - a_3y_2 \\ a_3y_1 - a_1y_3 \\ a_1y_2 - a_2y_1 \end{pmatrix} \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\
&= \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \alpha\,(\mathbf{a} \times \mathbf{y}) \\
&= \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \alpha\,\mathcal{F}(\mathbf{y}). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung.

(2b) **[2 Punkte]** Finden Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, wobei $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^\top, \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^\top, \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^\top$.

Lösung: Man berechnet leicht, dass

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \quad \mathcal{F}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Damit ist die Matrixdarstellung von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

(2c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\mathcal{F})$.

Tipp: Der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stimmt mit dem Kern ihrer Matrixdarstellungen überein.

Lösung: Wir präsentieren zwei mögliche Lösungswege.

Geometrische Überlegung: Für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ liefert uns $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ einen Vektor, welcher auf $\mathbf{x}$ und auf $\mathbf{a}$ senkrecht steht und Länge

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{x}\|\,\sin(\alpha) \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

hat, wobei $\alpha \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ bezeichnet. Die Länge entspricht somit der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ aufgespannten Parallelogramms. Weil für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt, das $\mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{y}\| = 0$, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(\mathcal{F}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0\} \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\mathcal{F}(\mathbf{x})\| = 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \sin(\alpha) = 0\} \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi\} = \mathrm{span}(\mathbf{a}). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}
\end{aligned}$$

Direkte Berechnung mit Darstellungsmatrix: Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um das lineare Gleichungssystem $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F})\mathbf{x} = 0$ zu lösen. Im Fall $a_3 \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_2a_1/a_3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
&\Rightarrow x_3 = t \in \mathbb{R},\ x_2 = \tfrac{a_2}{a_3}t,\ x_1 = \tfrac{a_1}{a_3}t.
\end{aligned}$$

Folglich ist in diesem Fall

$$\mathrm{Kern}(\mathcal{F}) = \mathrm{span}\big(\tfrac{1}{a_3}\mathbf{a}\big) = \mathrm{span}(\mathbf{a}). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Im Fall $a_3 = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Unter der Annahme $a_1 \neq 0$ folgt also $x_3 = 0, x_1 = t \in \mathbb{R}, x_2 = \frac{a_2}{a_1}t$. Falls hingegen auch $a_1 = 0$, gilt wegen $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, dass $a_2 \neq 0$ und somit erhalten wir dann $x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = t \in \mathbb{R}$. **[0.5 Punkte]**

Damit erhalten wir in jedem Fall $\mathrm{Kern}(\mathcal{F}) = \mathrm{span}(\mathbf{a})$.

(2d) **[2 Punkte]** Was ist $\mathrm{Rang}(\mathcal{F})$?

Tipp: Der Rang einer linearen Abbildung $\mathcal{L} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stimmt mit dem Rang ihrer Matrixdarstellungen überein.

Lösung: Aus (2c) wissen wir, dass $\dim(\mathrm{Kern}(\mathcal{F})) = 1$ **[0.5 Punkte]**. Mithilfe der Dimensionsformel **[0.5 Punkte]** folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rang}(\mathcal{F}) &= \dim(\mathrm{Bild}(\mathcal{F})) \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\
&= 3 - \dim(\mathrm{Kern}(\mathcal{F})) = 2. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}
\end{aligned}$$

(2e) [2 Punkte] Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rangle$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Lösung: Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts folgt, das für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf $\mathbf{x}$ steht. Damit ist $\langle \mathbf{x}, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rangle = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. **[2 Punkte]** Alternativ rechnen wir für alle $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ nach, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\ &= a_2 x_1 x_3 - a_3 x_1 x_2 + a_3 x_1 x_2 - a_1 x_2 x_3 + a_1 x_2 x_3 - a_2 x_1 x_3 \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \\ &= 0. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Diese Aufgabe kam als Übung 10.5 im HS2015 und als Übung 12.1 im HS2016.

Aufgabe 3 Lineares Gleichungssystem mit Parameter [10 Punkte]

Für zwei Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6-\alpha & \alpha+4 \\ -1 & -2 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-\beta \\ \beta-1 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(3a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des obigen Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β.

Lösung: Wir machen Zeilenumformungen wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6-\alpha & \alpha+4 & 3-\beta \\ -1 & -2 & 1-\alpha & \beta-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II-I \to II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4-\alpha & \alpha+1 & 2-\beta \\ -1 & -2 & 1-\alpha & \beta-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I+III \to III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4-\alpha & \alpha+1 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 4-\alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II+III \to II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4-\alpha & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\alpha & \beta \end{array}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Falls $\alpha = 4$, ist die Zeilenstufenform also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II \to II,\ I-3\cdot II \to I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Im Fall $\alpha \neq 4$ fahren wir mit unseren Zeilenumformungen fort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4-\alpha & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4-\alpha}\cdot \mathrm{III} \to \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4-\alpha & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{4-\alpha} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}-5\cdot\mathrm{III}\to\mathrm{II},\, \mathrm{I}-3\cdot\mathrm{III}\to\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-\frac{3\beta}{4-\alpha} \\ 0 & 4-\alpha & 0 & 2-\frac{5\beta}{4-\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{4-\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4-\alpha}\cdot \mathrm{II} \to \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-\frac{3\beta}{4-\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{4-\alpha}-\frac{5\beta}{(4-\alpha)^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{4-\alpha} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}\to\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{4+3\beta}{4-\alpha}+\frac{10\beta}{(4-\alpha)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{4-\alpha}-\frac{5\beta}{(4-\alpha)^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{4-\alpha} \end{array}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Im Fall $\alpha \neq 4$ lautet die Zeilenstufenform somit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha^2-4\alpha+3\alpha\beta-2\beta}{(4-\alpha)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8-2\alpha-5\beta}{(4-\alpha)^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{4-\alpha} \end{array}\right).$$

(3b) [1 Punkt] Was ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von α?

Lösung: Wir sehen aus Teilaufgabe (3a), dass $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 2$, falls $\alpha = 4$, **[0.5 Punkte]** und $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 3$, falls $\alpha \neq 4$. **[0.5 Punkte]**

(3c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β.

Lösung: Wir lesen die Antworten aus Teilaufgabe (3a) ab. Falls $\alpha = 4$ und $\beta \neq 0$, sehen wir, dass $\mathcal{L}(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}) = \emptyset$. **[0.5 Punkte]** Falls $\alpha = 4$ und $\beta = 0$, ist

$$\mathcal{L}(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} -(2x_2 + \frac{1}{5}) \\ x_2 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Und schliesslich ist die Lösungsmenge im Fall $\alpha \neq 4$ gegeben durch

$$\mathcal{L}(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-4\alpha+3\alpha\beta-2\beta}{(4-\alpha)^2} \\ \frac{8-2\alpha-5\beta}{(4-\alpha)^2} \\ \frac{\beta}{4-\alpha} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\frac{4+3\beta}{4-\alpha}+\frac{10\beta}{(4-\alpha)^2} \\ \frac{2}{4-\alpha}-\frac{5\beta}{(4-\alpha)^2} \\ \frac{\beta}{4-\alpha} \end{pmatrix} \right\}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(3d) [4 Punkte] Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ in Abhängigkeit von α.

Tipp: Die Basis des trivialen Vektorraums (das heisst, er enthält nur die Null) ist die leere Menge.

Lösung: Aus der Zeilenstufenform in Teilaufgabe (3a) sehen wir, dass im Fall $\alpha = 4$ die erste und die dritte Spalte von $\mathbf{A}$, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\},$$

linear unabhängig sind und das Bild von $\mathbf{A}$ aufspannen, und folglich eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ sind. **[1 Punkt]** Den Kern von $\mathbf{A}$ bestimmen wir im Fall $\alpha = 4$ ebenfalls sehr leicht aus der Zeilenstufenform:

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Folglich ist in diesem Fall zum Beispiel

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$. **[0.5 Punkte]** Falls $\alpha \neq 4$, sind alle drei Spalten von $\mathbf{A}$, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6-\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha+4 \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Sie bilden damit, genauso wie jede andere Basis des $\mathbb{R}^3$, eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3$. **[1 Punkt]** Ausserdem gilt im Fall $\alpha \neq 4$, dass

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

und damit, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ nur die leere Menge als Basis hat. **[0.5 Punkte]**

Aufgabe 4 Lineare Regression [10 Punkte]

Wir betrachten eine Grösse $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eine Funktion der Position $x \in \mathbb{R}$ ist. An den fünf Positionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 seien die fünf Messungen q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 gegeben:

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
q_i	-6	9	-13	1	3

Ein Bauingenieur hat durch tiefgründige Überlegungen folgendes Modell für die Abhängigkeit von q von $x \in \mathbb{R}$ entwickelt:

$$q(x) = \alpha\, x + \beta\, x^2 - \gamma\, 2^{|x|}.$$

Die drei Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sollen nun mithilfe der Ausgleichsrechnung aus obigen Messungen bestimmt werden.

(4a) [3 Punkte] Stellen Sie das zugehörige überbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf, wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir sehen, dass für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gelten sollte, dass $q_i = \alpha\, x_i + \beta\, (x_i)^2 - \gamma\, 2^{|x_i|}$, also folgt mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[1 Punkt] pro Spalte}$$

dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ verlangt ist.

(4b) [5 Punkte] Stellen Sie die passenden Normalengleichungen auf.

Lösung: Die Normalengleichungen lauten

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Wir berechnen

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & -36 \\ 0 & -36 & 41 \end{pmatrix}, \quad \textbf{[3 Punkte]} \qquad \mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[1.5 Punkte]}$$

(4c) [2 Punkte] Bestimmen Sie α, β und γ.

Lösung: Gauss liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 34 & -36 & -2 \\ 0 & -36 & 41 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\frac{18}{17}\text{II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 34 & -36 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{49}{17} & \frac{49}{17} \end{array}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Daraus folgt, dass $\gamma = 1$, $\beta = \frac{-2+36}{34} = 1$, sowie $\alpha = 1$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 5 Legendre-Polynome [10 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_n([-1, 1])$ der Vektorraum der Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ vom Grad kleiner oder gleich n ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das für alle $p, q \in \mathcal{P}_n([-1, 1])$ durch

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

gegeben ist. Wir betrachten die folgende lineare Abbildung:

$$\mathcal{F}_n\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_n([-1, 1]) & \to & \mathcal{P}_n([-1, 1]) \\ p(x) & \mapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\right] \end{array}. \tag{5.2}$$

(5a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2)$ von $\mathcal{F}_2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$.

Lösung: Es gilt

$$\mathcal{F}_2(1) = 0, \qquad \mathcal{F}_2(x) = -2x, \quad \textbf{[0.5 Punkte]} \qquad \mathcal{F}_2(x^2) = 2 - 6x^2. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(5b) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$.

Tipp: Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_n([-1,1]) \to \mathcal{P}_n([-1,1])$ sind ganz analog zu denjenigen von Matrizen definiert: Eine Zahl λ heisst Eigenwert von $\mathcal{L}$, falls es ein Polynom $\mathbf{0} \neq p \in \mathcal{P}_n([-1,1])$ gibt, so dass $\mathcal{L}(p) = \lambda \cdot p$. Ein solches Polynom $p \neq \mathbf{0}$ heisst dann Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\mathcal{L}$.
Hier ist es sinnvoll, den Polynomraum $\mathcal{P}_2([-1,1])$ mit dem $\mathbb{R}^3$ zu identifizieren und die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2)$ zu bestimmen.
Beachten Sie den Unterschied zwischen Vektoren (das heisst, den Polynomen) und Koordinatenvektoren!

Lösung: Weil $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2)$ eine Diagonalmatrix ist, lesen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -6$ **[0.5 Punkte]** direkt aus der Diagonalen ab. Ausserdem sehen wir, dass

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2) - \lambda_1 I_3) = \operatorname{Kern}(\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2)) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2) - \lambda_2 I_3) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2) - \lambda_3 I_3) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Mit $p_0 := 1$, $p_1 := x$ und $p_2 := x^2 - \frac{1}{3}$ ist der Eigenraum von $\mathcal{F}_2$ zum Eigenwert λ_1 also gleich $\operatorname{span}\{p_0\}$, der Eigenraum von $\mathcal{F}_2$ zum Eigenwert λ_2 gleich $\operatorname{span}\{p_1\}$ und der Eigenraum von $\mathcal{F}_2$ zum Eigenwert λ_3 gleich $\operatorname{span}\{p_2\}$.

(5c) **[2 Punkte]** Wählen Sie mithilfe von Teilaufgabe (5b) für jeden Eigenwert einen Eigenvektor und normieren Sie diesen bezüglich der durch das Skalarprodukt (5.1) induzierten Norm.

Lösung: Es gilt

$$\|p_0\|^2 = \langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2, \qquad \text{also} \quad q_0 := \frac{p_0}{\|p_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\|p_1\|^2 = \langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}, \qquad \text{also} \quad q_1 := \frac{p_1}{\|p_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\|p_2\|^2 = \left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

also

$$q_2 := \frac{p_2}{\|p_2\|} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1). \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

(5d) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie ein normiertes Polynom dritten Grades $q_3 \in \mathcal{P}_3([-1,1])$, welches orthogonal zu allen Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$ ist.

Lösung: Wir wählen $p_3 := x^3$ und wenden Gram-Schmidt auf die Basis $\{q_0, q_1, q_3, p_3\} \subseteq \mathcal{P}_3([-1,1])$ von $\mathcal{P}_3([-1,1])$ an. Genauer gesagt brauchen wir eigentlich nur den letzten Schritt in der Berechnung, aber der Vollständigkeit halber zeigen wir auch die vorherigen:

$$\langle q_1, q_0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\langle q_2, q_0\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{1} 3x^2 - 1\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{4}(x^3 - x)\Big|_{-1}^{1} = 0,$$
$$\langle q_2, q_1\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4}\int_{-1}^{1} 3x^3 - x\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Somit sind q_0, q_1 und q_2 bereits orthonormal. Mit gutem Verständnis von Gram-Schmidt sind obige Berechnungen aber eigentlich überflüssig. Wir fahren nun mit dem relevanten Teil der Berechnungen fort:

$$\langle p_3, q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\langle p_3, q_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{5}x^5|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{6}}{5}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$
$$\langle p_3, q_2\rangle = \sqrt{\frac{5}{8}}\int_{-1}^{1} 3x^5 - x^3\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-1}^{1} = 0. \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Also ist

$$\tilde{q}_3 := p_3 - \langle p_3, q_0\rangle q_0 - \langle p_3, q_1\rangle q_1 - \langle p_3, q_2\rangle q_2 = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}x = x^3 - \frac{3}{5}x \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

ein Polynom dritten Grades, das orthogonal zu allen Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$ ist. Um $\tilde{q}_3$ zu normieren, berechnen wir

$$\|\tilde{q}_3\|^2 = \left\langle x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x \right\rangle = \int_{-1}^{1} x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175} = \frac{8}{7 \cdot 5 \cdot 5}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Somit ist

$$q_3 := \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

ein normiertes Polynom dritten Grades, das orthogonal zu allen Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$ ist.

(5e) **[1 Punkt]** Verifizieren Sie, dass q_3 aus Teilaufgabe (5d) ein Eigenvektor der linearen Abbildung $\mathcal{F}_3$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Lösung: Wir berechnen

$$\mathcal{F}_3(q_3) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[(1-x^2)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}q_3\big] = \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[(1-x^2)(15x^2-3)\big]$$

$$= \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[-15x^4 + 18x^2 - 3\big] = \sqrt{\frac{7}{8}}(-60x^3 + 36x) \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

$$= (-12) \cdot \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x) = (-12) \cdot q_3.$$

Folglich ist q_3 ein Eigenvektor von $\mathcal{F}_3$ zum Eigenwert -12. **[0.5 Punkte]**