

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum		

1	2	3	4	5	6	7		Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie den Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift, Rot- oder Grünstift schreiben.
- Versuchen Sie, die Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbstaendig verfasste Zusammenfassung, Taschenrechner

Viel Erfolg!

Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Sommer 2009

Prof. D. Stoffer

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

1. a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau und führen Sie einen Eliminationsschritt des Gaussverfahrens aus, wobei Sie das Pivot in der ersten Zeile wählen.

$$3x - 2y + z = 5$$

$$2x \quad \quad + z = 3$$

$$6x + y - 2z = 3$$

- b) Das Gaussverfahren, angewandt auf das lineare Gleichungssystem

$$x + ay + z = b$$

$$ax + 2y + 2z = b$$

$$ax + y + z = b$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, liefert das folgende Endschema:

1	a	1	b
0	1	1	0
0	0	$-a(1-a)$	$b(1-a)$

Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge.

2. Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

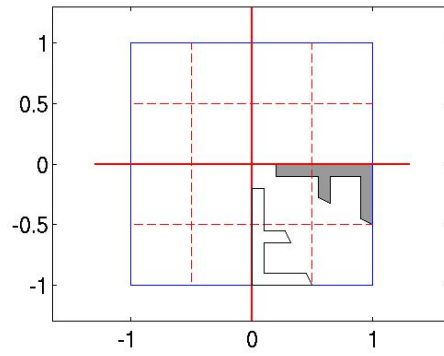
sowie die Matrix $A = (u \ v \ w)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Ihre Antworten sind nicht zu begründen.)

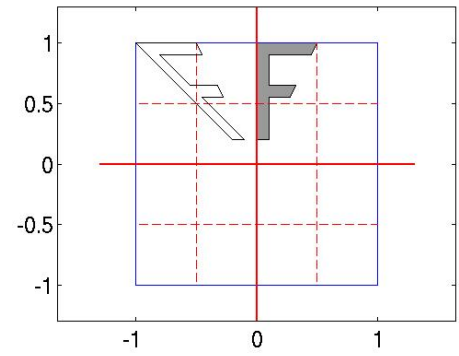
- a) Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung.
- b) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen.
- c) Die Vektoren u, v, w sind erzeugend.
- d) Die Vektoren u, v, w sind linear abhängig.
- e) Es gilt $\det(A) = 0$.
- f) Der Vektor $(1, -1, 1)^T$ ist Eigenvektor der Matrix A .
- g) 1 ist Eigenwert der Matrix A .
- h) Die Matrix A ist symmetrisch.
- i) Die Matrix A hat eine Inverse.

3. Bestimmen Sie eine lineare Abbildung, welche das gefärbte F in das weisse F überführt.

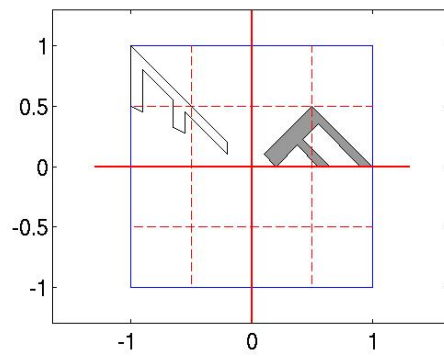
a)



b)



c)



4. Für verschiedene Werte von x wird die Grösse

$$K(x) = px^2 - (3p - q)x + 2p - q$$

gemessen:

x_i	0	1	2	3
K_i	3	0	1	5

Bestimmen Sie die Parameter p und q nach der Methode der kleinsten Quadrate.

5. Gegeben ist das System von linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = Ax$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix A .
- Bestimmen Sie die Lösung mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. P sei das Interpolationspolynom durch die Stützpunkte $(0, c)$, $(1, 1)$, $(3, -1)$, $(4, 4)$.

a) Bestimmen Sie $P(2)$.

b) Wie gross ist c , wenn P ein quadratisches Polynom ist.

7. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

mit der Trapezregel für die Schrittweiten $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Extrapolieren Sie Ihre Resultate mit dem Aitken-Neville-Verfahren. Bestimmen Sie den relativen Fehler Ihrer Approximation.

(Hinweis: Der exakte Wert ist $\frac{\pi}{4}$.)