Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Sommer 2010

Prof. D. Stoffer

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

1. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & 2y & + & 2az & = & 2b \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & b \end{array}$$

a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in ein Tableau und führen Sie *einen* Eliminationsschritt des Gaussverfahrens durch.

Mit dem Gaussverfahren kann das folgende Endschema erreicht werden.

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & ab(a-1) \\ \hline \end{array}$$

b) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist $b = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung.

c) Setzen Sie $b = 1$. Für welche a hat das lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Geben Sie jeweils die Lösungsmengen an.

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der Grösse $K = ax+by+cz$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

x_i	1	-1	-1	1	0	2
y_i	-2	-1	1	0	1	1
z_i	-1	2	0	1	1	-1
K_i	-1	1	0	1	1	0

3. **a)** Für welchen Wert von s hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & s \end{pmatrix}$$

den Eigenwert 2?

b) Bestimmen Sie für $s = 2$ alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A. (Hinweis: -1 ist ein Eigenwert)

c) Ist A für $s = 2$ diagonalisierbar? Bitte begründen Sie Ihre Aussage!

4. Untersuchen Sie das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = Ax + b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen, d.h. Lösungen $x(t)$ mit $\dot{x}(t) = (0, 0, 0)^T$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{x} = Ax$.

5. a) Gegeben sind die zwei Funktionen

$$x \mapsto f(x) = x + e^x$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

im Intervall $-4 \leq x \leq 4$. Skizzieren Sie $f(x)$ auf dem Beiblatt. Die Funktion $g(x)$ ist bereits eingezeichnet.

Wieviele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = g(x)$? Lesen Sie von Ihrer Skizze grobe Approximationen ab.

b) Bestimmen Sie mit dem Sekantenverfahren die Lösung, welche am nächsten bei 0 liegt, auf drei signifikante Stellen genau. Geben sie dazu die Funktion $F(x)$ an, deren Nullstellen zu suchen sind, und benutzen Sie die Startwerte $x_0 = 0$, $x_1 = -1$.

6. Konstruieren Sie Approximationen $\widehat{I}$ für Integrale

$$I = \int_0^1 t^2 f(t) \mathrm{d}t$$

der Form $\widehat{I} = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$ mit Stützstellen t_1, t_2 und den Gewichten w_1, w_2.

a) Bestimmen Sie für $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$ die Gewichte w_1, w_2, so dass die Approximation exakt ist, wenn f ein Polynom vom Grad ≤ 1 ist.

b) Setzen Sie $t_2 = 1$. Bestimmen Sie t_1 und w_1, w_2, so dass die Approximation $\widehat{I}$ für Polynome von Grad ≤ 2 exakt ist.

c) Setzt man $t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, $t_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, $w_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{24}\sqrt{\frac{5}{2}}$, $w_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\sqrt{\frac{5}{2}}$, so ist $\widehat{I}$ exakt für Polynome vom Grad ≤ 3. Bestimmen Sie den relativen Fehler der Approximation $\widehat{I_1}$ für $f_1(t) = e^t$ und $\widehat{I_2}$ für $f_2(t) = e^{-t}$. Verwenden Sie dazu die exakten Werte der Integrale

$$I_1 = e - 2, \quad I_2 = 2 - \frac{5}{e}.$$

Viel Erfolg!