P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung
Sommer 2016

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	19.08.2016	

1	2	3	4	5	6	Total
7P	11P	10P	11P	8P	13P	60P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Lineares Gleichungssystem mit Parameter [7 Punkte]

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,4}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 6\alpha \\ 4 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

(1a) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des obigen Gleichungssystems.

(1b) **[1 Punkt]** Was ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$?

(1c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für alle möglichen Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Kurzaufgaben [11 Punkte]

Stellen Sie (wie bei allen anderen Aufgaben) jeweils Ihren Lösungsweg klar dar.

(2a) [2 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für zwei stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ ist die Additionsvorschrift $+$ wie gewöhnlich punktweise definiert:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso ist die skalare Multiplikationsvorschrift $\cdot$ für einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ punktweise gegeben:

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Menge $\left\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1\right\}$ ein Unterraum von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist.

(2b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(2c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(2d) [2 Punkte] Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$ so, dass das Gleichungssystem $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine Lösung hat. Bestimmen Sie $\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{C})$.

(2e) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2},$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit und folgern Sie, ob $\mathbf{D}$ diagonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 3 Lineare Polynomabbildung [10 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, 2x^2-1, x^2-3x+2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, die für alle $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p'(x) - \left(\int_0^1 p(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x^2$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

(3a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist.

(3b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

(3c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(3d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\mathbf{K}^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(\mathsf{Id})$, die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$ überführt.

(3e) [2 Punkte] Sei $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ das Polynom, das die Koordinaten $(2, 0, 1)^\top$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ besitzt. Bestimmen Sie mithilfe der Teilaufgaben (3c) und (3d) die Koordinaten von $\mathcal{F}(q) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

Aufgabe 4 Lineare Rekursion [11 Punkte]

Nehmen wir an, wir befinden uns in einer menschlichen Zelle, die drei verschiedene Arten A, B und C von Molekülen herstellen kann. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Anzahl an produzierten Molekülen der jeweiligen Art n Sekunden nach Messbeginn mit a_n, b_n und c_n. Diese Bestände von Molekülen folgen für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Gesetzmässigkeit

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\,a_n + 3\,b_n + 3\,c_n, \\ b_{n+1} &= 3\,a_n + 4\,b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= 3\,a_n + b_n + 4\,c_n. \end{aligned}$$

Bei Messbeginn befindet sich ein Molekül des Typs B, aber keines der Typen A und C in der Zelle, also $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ und $c_0 = 0$. Im Folgenden sei

$$\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(4a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$, für die $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ gilt, und geben Sie einen Ausdruck für $\mathbf{x}_n$ in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{x}_0$ an.

(4b) [6 Punkte] Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine *orthogonale* Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3,3}$, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}.$$

Tipp: Die Zahlen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 8$ sind Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$.

(4c) [3 Punkte] Geben Sie eine explizite Formel zur Berechnung von c_n an, die nur von n abhängt.

Aufgabe 5 Lineare Regression [8 Punkte]

In der (x, y)-Ebene seien vier Datenpunkte (x_i, y_i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, gegeben durch

x_i	0	0	1	1
y_i	0	-1	1	-2

.

Es soll nun ein Kreis mit Mittelpunkt (u_1, u_2) durch diese Datenpunkte gelegt werden, der in der (x, y)-Ebene der Funktionsgleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,u_1 x - 2\,u_2 y - 1 = 0$$

genügt.

(5a) [2 Punkte] Auf welches überbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ führt die Berechnung des Kreismittelpunktes?

(5b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die beste Wahl $(u_1^\star, u_2^\star)$ für den Kreismittelpunkt im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

(5c) [2 Punkte] Angenommen, Sie würden die sparsame $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{A}$ kennen. Leiten Sie eine Formel für $(u_1^\star, u_2^\star)$ her, die nur von $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{b}$ abhängt.

Tipp: (Zur Erinnerung.) Mit der sparsamen $\mathbf{QR}$-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ bezeichnen wir die $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{B}$, für die $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt.

Aufgabe 6 Legendre-Polynome [13 Punkte]

Sei $\mathcal{P}([-1,1])$ der Vektorraum *aller* Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$ (er enthält also Polynome von beliebig hohem Grad) ausgestattet mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dadurch induzierten Norm $\|\cdot\|$, die für alle $f,g \in \mathcal{P}([-1,1])$ durch

$$\langle f,g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\| \coloneqq \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

gegeben sind. Ausserdem bezeichnen $p_0,p_1,p_2,\ldots \in \mathcal{P}([-1,1])$ die Monome, das heisst, für alle $j \in \mathbb{N}_0$, $x \in [-1,1]$ gilt $p_j(x) = x^j$.

Wir betrachten die Polynome $q_0,q_1,q_2,\ldots \in \mathcal{P}([-1,1])$, die durch Anwendung des Gram-Schmidt-Algorithmus auf $p_0,p_1,p_2,\ldots$ (in dieser Reihenfolge!) entstehen. Oftmals werden die Polynome $q_0,q_1,q_2,\ldots$ Legendre-Polynome genannt.

Sie dürfen in dieser Aufgabe für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ verwenden, dass $\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_k([-1,1])$ ist (wobei hier $\mathcal{P}_k([-1,1])$ wie gewohnt den Vektorraum der Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich k bezeichnet).

(6a) [5 Punkte] Berechnen Sie die ersten drei Legendre-Polynome q_0, q_1 und q_2.

(6b) [2 Punkte] Zeigen Sie mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass q_n ein Polynom vom Grad n ist.

(6c) [2 Punkte] Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}_{n-1}([-1,1])$, dass

$$\langle q_n, f\rangle = 0.$$

(6d) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Rekursion von der Form

$$q_{n+1} = (\alpha_n x + \beta_n)q_n + \gamma_n q_{n-1}$$

mit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Tipp: Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $x \cdot q_n$ und untersuchen Sie dessen Koordinaten bezüglich der Basis $\{q_0,q_1,\ldots,q_{n+1}\}$ von $\mathcal{P}_{n+1}([-1,1])$. Verwenden Sie ausserdem ohne Beweis, dass $\langle x\cdot q_n, q_{n+1}\rangle \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie Teilaufgaben (6b) und (6c).