R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung

		Note
Name		
Vorname		
Leginummer		
Datum	18.08.2017	

1	2	3	4	5	Total
10P	10P	10P	10P	10P	50P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Wahr-und-falsch [10 Punkte]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so: wahr falsch

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch. Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein wir runden auf 0 auf.

		wahr	falsch
a)	Es seien $\boldsymbol{v_1}$,$\boldsymbol{v_2}$ zwei Eigenvektoren der Matrix A. Dann ist auch $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$ ein Eigenvektor von A.		
b)	Seien A_1,A_2,A_3 drei linear unabhängige Matrizen in Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, so dass $A_1\boldsymbol{v} + A_2\boldsymbol{v} + A_3\boldsymbol{v} \neq 0$.		
c)	Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.		
d)	Die Polynome $\{(2x+2)^2, 2x^2+2, (x-1)(x+1)\}$ erzeugen $\mathbb{P}_2$.		
e)	Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für alle $n \times n$ Matrizen.		
f)	Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.		
g)	Es gibt eine Matrix mit charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda$, welche invertierbar ist.		
h)	$\det(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T) = 0$ wobei $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.		
i)	Es gibt eine Basis $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1$ und $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$, wobei die norm $\|\cdot\|$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert wird.		
j)	$A \mapsto A^T$ ist eine lineare Abbildung und die symmetrischen Matrizen bilden einen Eigenraum davon.		

Aufgabe 2 Orthonormal-Projektion [10 Punkte]

Wir betrachten den Unterraum

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$ mit den Standardskalarprodukt.

(2a) [3 Punkte] Wir bezeichnen mit $U_\perp$ das orthogonale Komplement zu U in $\mathbb{R}^4$, d.h. die Menge aller Vektoren von $\mathbb{R}^4$ welche senkrecht auf U stehen.

Bestimmen Sie $U_\perp$.

(2b) [3 Punkte] Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^4$ welche ausschliesslich Vektoren aus U respektive $U_\perp$ enthält.

(2c) [2 Punkte] Geben Sie die Orthogonalprojektion von

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf U an.

(2d) [2 Punkte] Geben Sie die Orthogonalprojektion von

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf $U_\perp$ an.

Aufgabe 3 Kern und Bild [10 Punkte]

Wir betrachten folgende Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1+\alpha & -1-\alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1+4\alpha & 5+\alpha \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(3a) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von α.

(3b) **[2 Punkte]** Geben Sie $\dim(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A}))$ an.

(3c) **[2 Punkte]** Für welche Werte von α ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar?

Aufgabe 4 Vektorraum der Polynome [10 Punkte]

Sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F :& \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 \\ & p(t) \mapsto (t^2 - 3)p''(t) + p'(t) - 3p(0) \end{aligned}$$

(4a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(4b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von F.

(4c) **[4 Punkte]** Berechnen Sie $F^n(p(t))$ für $p(t) = 2 + 7t + t^2$ und $n \geqslant 1$.

Aufgabe 5 Kleinequadrate [10 Punkte]

Für die Grösse b wird ein Modell der Form $b = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z$ angenommen. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ nach der Methode der kleinsten Quadrate mit den Werten aus folgender Tabelle

X_i	Y_i	Z_i	b_i
-1	2	0	4
-1	0	2	2
2	-1	0	-2
2	0	-1	0
0	-1	2	-2
0	2	-1	4

.