R. Käppeli
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung

Winter 2016
Typ B

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	03.02.2017	

1	2	3	4	5	Total
10P	10P	10P	10P	10P	50P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig handschriftlich verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Räumen Sie Ihre elektronischen Geräte (Mobiltelefone, Tablets, etc.) **ausgeschaltet** in die Tasche.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Wahr oder falsch? [10 Punkte]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. Setzen Sie Kreuzchen in die entsprechenden Kästchen, und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Nicht gelöste Teilaufgaben ergeben 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein – ein einem solchen Fall runden wir die Gesamtpunktzahl immer auf 0 Punkte auf.

		wahr	falsch
a)	Die Polynome $\{x^2+1, x(x+1), x+1, x-1\} \subseteq \mathbb{P}_2$ im Vektorraum $\mathbb{P}_2$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 sind linear unabhängig.		
b)	Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar, so ist es auch $\mathbf{A}^4$.		
c)	Hat eine reelle (2×2)-Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 2, so ist $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.		
d)	Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, die durch $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M})_{i,j}$ für alle $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben ist, ist linear.		
e)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ regulär.		
f)	Wenn die Matrix $\mathbf{C}$ diagonalisierbar ist, so ist auch ihre Transponierte $\mathbf{C}^\top$ diagonalisierbar.		
g)	Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist $\mathbf{w}\mathbf{w}^\top$ eine Matrix mit Rang n.		
h)	Sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Falls $\det(\mathbf{D}) \neq 0$ ist, so bilden sowohl die Spalten- als auch die Zeilenvektoren von $\mathbf{D}$ jeweils eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.		
i)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 8 & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ ist nicht für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar.		
j)	Jede quadratische Matrix, bei der auf der Diagonalen nur Einsen und oberhalb der Diagonalen nur Nullen stehen, ist invertierbar.		

Aufgabe 2 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung [10 Punkte]

Oft ist eine lineare Abbildung nicht direkt durch eine Matrix, sondern durch andere Operationen beschrieben. Als Beispiel dafür betrachten wir in dieser Aufgabe für einen fixierten Vektor $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$\mathcal{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{für die gilt} \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Hierbei steht $\times$ für das Vektorprodukt, welches für zwei Vektoren $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right), \mathbf{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben ist.

(2a) **[2 Punkte]** Überprüfen Sie, dass es sich bei $\mathcal{F}$ um eine lineare Abbildung handelt.

(2b) **[2 Punkte]** Was ist die Abbildungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^\top, \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^\top, \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^\top$?

(2c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\mathcal{F})$.

Tipp: Der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{L} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stimmt mit dem Kern ihrer Matrixdarstellungen überein.

(2d) **[2 Punkte]** Was ist $\mathrm{Rang}(\mathcal{F})$?

Tipp: Der Rang einer linearen Abbildung $\mathcal{L} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stimmt mit dem Rang ihrer Matrixdarstellungen überein.

(2e) **[2 Punkte]** Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rangle$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Diese Aufgabe kam als Übung 10.5 im HS2015 und als Übung 12.1 im HS2016.

Aufgabe 3 Lineares Gleichungssystem mit Parameter [10 Punkte]

Für zwei Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6-\alpha & \alpha+4 \\ -1 & -2 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-\beta \\ \beta-1 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(3a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des obigen Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β.

(3b) [1 Punkt] Was ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von α?

(3c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β.

(3d) [4 Punkte] Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ in Abhängigkeit von α.

Tipp: Die Basis des trivialen Vektorraums (das heisst, er enthält nur die Null) ist die leere Menge.

Aufgabe 4 Lineare Regression [10 Punkte]

Wir betrachten eine Grösse $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eine Funktion der Position $x \in \mathbb{R}$ ist. An den fünf Positionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 seien die fünf Messungen q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 gegeben:

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
q_i	-6	9	-13	1	3

Ein Bauingenieur hat durch tiefgründige Überlegungen folgendes Modell für die Abhängigkeit von q von $x \in \mathbb{R}$ entwickelt:

$$q(x) = \alpha\, x + \beta\, x^2 - \gamma\, 2^{|x|}.$$

Die drei Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sollen nun mithilfe der Ausgleichsrechnung aus obigen Messungen bestimmt werden.

(4a) [3 Punkte] Stellen Sie das zugehörige überbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf, wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(4b) [5 Punkte] Stellen Sie die passenden Normalengleichungen auf.

(4c) [2 Punkte] Bestimmen Sie α, β und γ.

Aufgabe 5 Legendre-Polynome [10 Punkte]

Sei $\mathbb{P}_n[-1,1]$ der Vektorraum der Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich n ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das für alle $p, q \in \mathbb{P}_n[-1,1]$ durch

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

gegeben ist. Wir betrachten die folgende lineare Abbildung:

$$\mathcal{F}_n\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{P}_n[-1,1] & \to & \mathbb{P}_n[-1,1] \\ p(x) & \mapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\Big] \end{array}. \tag{5.2}$$

(5a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ von $\mathcal{F}_2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ von $\mathbb{P}_2[-1,1]$.

(5b) [2 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$.

Tipp: Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\mathcal{L}\colon \mathbb{P}_n[-1,1] \to \mathbb{P}_n[-1,1]$ sind ganz analog zu denjenigen von Matrizen definiert: Eine Zahl λ heisst Eigenwert von $\mathcal{L}$, falls es ein Polynom $\mathbf{0} \neq p \in \mathbb{P}_n[-1,1]$ gibt, so dass $\mathcal{L}(p) = \lambda \cdot p$. Ein solches Polynom $p \neq \mathbf{0}$ heisst dann Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\mathcal{L}$.
Hier ist es sinnvoll, den Polynomraum $\mathbb{P}_2[-1,1]$ mit dem $\mathbb{R}^3$ zu identifizieren und die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.
Beachten Sie den Unterschied zwischen Vektoren (das heisst, den Polynomen) und Koordinatenvektoren!

(5c) [2 Punkte] Wählen Sie mithilfe von Teilaufgabe (5b) für jeden Eigenwert einen Eigenvektor und normieren Sie diesen bezüglich der durch das Skalarprodukt (5.1) induzierten Norm.

(5d) [3 Punkte] Bestimmen Sie ein normiertes Polynom dritten Grades $q_3 \in \mathbb{P}_3[-1,1]$, welches orthogonal zu allen Eigenvektoren von $\mathcal{F}_2$ ist.

(5e) [1 Punkt] Verifizieren Sie, dass q_3 aus Teilaufgabe (5d) ein Eigenvektor der linearen Abbildung $\mathcal{F}_3$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.