R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 4

Aufgabe 4.1 Invertieren einer 3x3 Matrix mit dem Gauss-Jordan Algorithmus

4.1a) Sei die folgende matrix gegeben

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse von A mit dem Gauss-Jordan Algorithmus.

Tipp: Schreibe die Indentitätsmatrix neben A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dann:

1. Verwende das Gauss Verfahren, um die linke Matrix in eine obere Dreiecksmatrix umzuformen. Wende stets die Schritte auch auf die rechte Matrix an.

2. Nun wende das Gauss Verfahren auch, um die rechte Matrix (obere Dreiecksmatrix) in die Identitätsmatrix zu überführen. Wende wieder stets die Schritte auch auf die rechte Matrix an.

Aufgabe 4.2

4.2a) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Aus dieser möchten wir die zweite Zeile extrahieren. Das wollen wir tun, indem wir eine Matrix $\mathbf{B}$ finden, sodass entweder $\mathbf{BA} = (2, -5)$ oder $\mathbf{AB} = (2, -5)$. Für welche der folgenden Matrizen ist dies möglich?

(i) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(v) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2b) Wie oben beschrieben, möchten wir nun die erste Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ extrahieren. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(i) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(v) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.3

Sei $\mathbf{I}_2$ die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

4.3a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix $\mathbf{V} := \mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top$ orthogonal?

4.3b) Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$\mathbf{V}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

Aufgabe 4.4

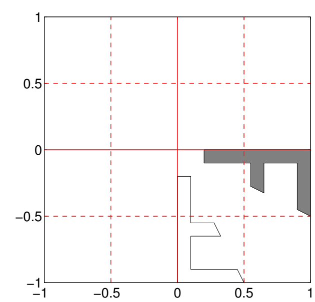
Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

wobei $\phi = \pi/3$. Zeichnen Sie das Dreieck mit den Ecken a, b, c. Wenden Sie die Matrix R auf die Vektoren an und zeichnen Sie auch das entsprechende neue Dreieck. Was bedeutet das Anwenden von R geometrisch?

Aufgabe 4.5

4.5a) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.

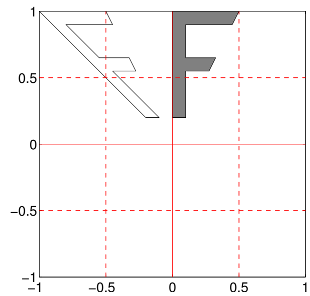


(i) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.5b) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.

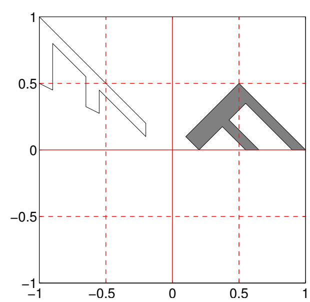


(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4.5c) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.



(i) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

Veröffentlichung am 11. Oktober 2016.

Abzugeben bis 19. Oktober 2016.