R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Serie 5

Aufgabe 5.1

5.1a) Seien $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ Lösungen des LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

(i) richtig

(ii) falsch

5.1b) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ein homogenes LGS und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.

(i) richtig

(ii) falsch

5.1c) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang r kleiner als die Anzahl m der Gleichungen.

(i) richtig

(ii) falsch

5.1d) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ sei eine Lösung des homogenen LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{v}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Dann hat $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 5.2

5.2a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

(i) richtig

(ii) falsch

5.2b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

(i) richtig

(ii) falsch

5.2c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 5.3

5.3a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ regulär ist.

5.3b) Für welche Werte des Parameters γ ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

Aufgabe 5.4 Rundungsfehler

In dieser Aufgabe sollen Sie wie ein (leistungsschwacher) Computer mit der fixen Anzahl von 4 Dezimalstellen rechnen. Runden Sie also jedes Zwischenergebnis bis auf 4 Dezimalstellen:

$$0.m_1m_2m_3m_4 \cdot 10^E, \text{ mit } m_1 \neq 0, \; E \in \mathbb{Z},$$

bevor Sie weiterrechnen. So wird z.B. aus

$$0.0100101 = 0.100101 \cdot 10^{-1} \approx 0.1001 \cdot 10^{-1} \,.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}\,, \\ \text{mit } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0.0001 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.4a) mithilfe der gewöhnlichen LR-Zerlegung.

5.4b) mithilfe der LR-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie. Die Spaltenmaximumstrategie bedeutet, bei jedem Schritt des Gauss–Algorithmus Zeilen zu vertauschen, sodass das Pivot im Absolutbetrag jeweils maximiert wird.

5.4c) Was stellen Sie fest, wenn Sie die Resultate aus 5.4a) und 5.4b) vergleichen? Versuchen Sie, eine Erklärung dafür zu geben.

Aufgabe 5.5 Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

5.5a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ regulär?

Tipp: Überlegen Sie sich, wieso eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn das Gleichungssystem $\mathbf{M}\mathbf{x} = 0$ *nur* die triviale Lösung $\mathbf{x} = 0$ hat, und verwenden Sie diese Tatsache.

5.5b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 5.6

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.6a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. entsprechende Matrizen L, R und P, für welche $PA = LR$ gilt.

5.6b) Füer $\boldsymbol{b} = (13, 29/5, 14)^T$ und $\boldsymbol{c} = (19, 39/5, -6)^T$ berechne die Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ der LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ mit einer LR-Zerlegung.

Veröffentlichung am 18. Oktober 2016.

Abzugeben bis 26. Oktober 2016.