

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 6

Aufgabe 6.1 Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen

6.1a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{pmatrix},$$

6.1b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2.94 & -4.65 & 4.41 & -0.15 & 1.31 & 0.00 & 2.18 & -2.08 & -0.14 & 2.64 \\ 4.54 & -1.60 & 4.79 & -1.63 & 3.89 & 0.00 & 4.05 & -3.75 & -2.48 & -3.14 \\ 1.47 & -0.37 & -1.20 & -4.73 & 3.87 & 0.00 & -0.45 & 3.27 & 0.11 & -1.76 \\ -1.69 & -0.68 & -4.80 & 3.56 & -0.60 & 0.00 & 2.26 & -4.18 & -1.22 & -2.73 \\ 2.04 & -4.82 & -2.25 & -4.00 & 4.43 & 0.00 & 1.93 & -1.11 & -0.55 & 2.46 \\ 3.20 & -3.97 & -2.47 & 1.00 & 4.64 & 0.00 & 0.56 & -2.35 & 0.90 & -1.26 \\ -3.78 & -2.56 & 3.63 & 4.94 & -0.04 & 0.00 & 2.01 & -1.29 & 3.97 & 3.28 \\ 4.08 & -4.01 & -1.71 & 1.52 & 0.72 & 0.00 & -3.99 & -0.77 & -2.29 & -4.72 \\ 1.08 & -0.43 & 2.78 & -3.60 & 0.02 & 0.00 & -4.54 & 4.45 & -4.67 & -3.84 \\ -4.44 & 2.97 & 4.25 & -1.88 & -1.85 & 0.00 & -3.15 & 4.25 & 2.02 & 3.19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2 Determinante

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind für beliebige $(n \times n)$ -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} .

- (i) $\det(2\mathbf{A}) = 2 \det(\mathbf{A})$
- (ii) $\det(\mathbf{A}^4) = (\det(\mathbf{A}))^4$
- (iii) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}$ wenn $a_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$, d.h. es handelt sich um eine Dreiecksmatrix, bei welcher rechts unten Nullen stehen.
- (iv) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

(v) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$

(vi) Wenn \mathbf{A} singularär ist, dann ist auch \mathbf{AB} singularär.

(vii) $\det(\mathbf{AA}^\top \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

Aufgabe 6.3

Multiple Choice: Bitte kreuzen Sie richtige Antworten an. Evtl. sind mehrere Antworten richtig.

6.3a) Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$,

(ii) $\det A \neq 0$.

6.3b) Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$,

(ii) $\det A \neq 0$.

6.3c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$,

(ii) $\det M = 0$,

(iii) $\det M = \pm 1$.

6.3d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

6.3e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2 \\ \alpha x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(i) \det A = -\frac{1}{\alpha+2},$$

$$(ii) \det A = \alpha + 2,$$

$$(iii) \det A = -\alpha - 2.$$

6.3f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 4.1e)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2 \\ \alpha x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

$$(ii) x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4,$$

$$(iii) x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6.4

6.4a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix, A eine $n \times n$ -Matrix, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2I_n \quad \text{und} \quad A\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Die Determinante von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte sind nicht möglich.

(ii) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ hat die Lösung $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

Veröffentlichung am 25. Oktober 2016.

Abzugeben bis 2. November 2016.