

# Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

## Serie 7

### Aufgabe 7.1

7.1a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

7.1b) Für welche Werte des Parameters  $a$  besitzt die Matrix eine Inverse?

### Aufgabe 7.2

7.2a) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2b) Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und von} \quad N = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Schauen Sie sich  $N$  genau an um langwierige Berechnungen zu vermeiden.

### Aufgabe 7.3

**7.3a)** Für die reelle Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor  $\mathbf{b} = (1, 2, 0)^\top$  hat das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \dots$

- (i) keine Lösung.
- (ii) eine eindeutige Lösung.
- (iii) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.
- (iv) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

### **Aufgabe 7.4 Berechnen Sie ein Volumen mit der Determinante**

Wir definieren das Kreuzprodukt von zwei Vektoren  $(a_1, a_2, a_3)^\top$  und  $(b_1, b_2, b_3)^\top$  als den Vector  $\mathbf{d}$  mit Koordinaten:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} := \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_x + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_z,$$

wobei  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^\top$ ,  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)^\top$  und  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^\top$  die Einheitsvektoren sind. Der resultierende Vektor  $\mathbf{d}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  und sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelograms, welches von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird.

**7.4a)** Sei  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)^\top$  und  $\mathbf{b} = (3, 2, 1)^\top$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $(0, 0, 1)^\top$ .

**7.4b)** Sei  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (3, 2, 1)^\top$  und  $\mathbf{c} = (0, 0, 1)^\top$ . Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, welches von  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird, mit Hilfe der Determinante.

Veröffentlichung am 2. November 2016.

Abzugeben bis 9. November 2016.