R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 8

Aufgabe 8.1

8.1a) Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(i) A ist orthogonal.

(ii) A ist nicht orthogonal.

(iii) $|\det(A)| \neq 1$.

(iv) $\det(A) = 1$.

(v) $\det(A) = -1$.

Aufgabe 8.2

Gegeben sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \boldsymbol{b} \notin \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n\}.$$

Dann existiert keine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Aufgabe 8.3

8.3a) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathbb{P}_n(x) := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad $\leq n$. Es gilt:

(i) Die Dimension des Unterraums $\mathbb{P}_n$ ist $n+1$.

(ii) Die Sinusfunktion ist Element von $\mathcal{F}$ ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume $\mathbb{P}_n$ ($\sin \notin \mathbb{P}_n$).

(iii) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(iv) $1, \sin^2, \cos^2$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(v) Sind zwei Polynome $p(x), q(x)$ linear unabhängig, so auch die Polynome $xp(x), xq(x)$.

(vi) Der Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{\sin\}$ schneidet den Unterraum $\mathbb{P}_3$ nur in 0 (das heisst $V \cap \mathbb{P}_3 = \{0\}$) und es gilt $\dim(\operatorname{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$.

Aufgabe 8.4

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Veröffentlichung am 8. November 2016.

Abzugeben bis 16. November 2016.