R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 9

Aufgabe 9.1

Finden Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\oplus$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.3

9.3a) Sei V die folgende Menge von Vektoren: $\{(x, y, 3x - y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

9.3b) Ist die Menge $W = \{(x, 3x - 1, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.4 Gram-Schmidt Algorithmus

9.4a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ eine orthonormale Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Benützen Sie das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

9.4b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, d.h.

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3.$$

Aufgabe 9.5

9.5a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + ... + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

9.5b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

9.5c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Veröffentlichung am 15. November 2016.

Abzugeben bis 23. November 2016.