R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 10

Aufgabe 10.1

Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}\,, \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\; x_1 = x_4\}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

10.1a) U,

10.1b) V,

10.1c) $U \cap V$.

Aufgabe 10.2

10.2a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.2b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Aufgabe 10.3

Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5 \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V. Benutzen Sie, dass $\{t^3, t^2, t, 1\}$ eine Basis von $\mathbb{P}^3$ ist, und verwenden Sie diese für die Berechnungen.

Aufgabe 10.4 Affiner Unterraum

Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ von Vektoren

$$U := \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

10.4a) Untersuchen Sie, ob U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

10.4b) Wir definieren die folgende Addition $\oplus$ auf U:

$$\boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2 := \left(\boldsymbol{u}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\boldsymbol{u}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$. Eine skalare Multiplikation $\odot$ ist definiert durch

$$\lambda \odot \boldsymbol{u} := \lambda \left(\boldsymbol{u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\boldsymbol{u} \in U$. Untersuchen Sie, ob $(U, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist, wobei der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Nullvektor definiert ist.

Aufgabe 10.5

Im Vektorraum $\mathbb{P}_n = \mathrm{span}(1, x, x^2, \cdots, x^n)$ der Polynome definiert

$$(P, Q) := \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x, \quad P, Q \in \mathbb{P}_n$$

ein Skalarprodukt.

10.5a) Bestimmen sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.

10.5b) Bestimmen Sie den Winkel ϕ zwischen $P_i(x) = x^i$ und $P_j(x) = x^j$ für beliebige $i, j \leqslant n$.

Veröffentlichung am 22. November 2016.

Abzugeben bis 30. November 2016.