R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 12

Aufgabe 12.1 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung

Oft findet man lineare Abbildung nicht beschrieben durch eine Matrix sondern durch andere Operationen. In diesem Beispiel betrachten wir für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \; ,$$

wobei $\times$ für das Vektorprodukt steht.

12.1a) Überprüfen Sie, dass es sich bei F um eine lineare Abbildung handelt.

12.1b) Was ist die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$?

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

12.1c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F)$.

Tipp: Den Nullraum kann man F direkt "ansehen" oder auch einfach dadurch bestimmen, dass man den Kern der Darstellungsmatrix ausrechnet.

12.1d) Was ist $\mathrm{Rang}(F)$?

12.1e) Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, F(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle , \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 12.2

12.2a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Orthonormalbasen für Kern A und Bild A.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Basis von Kern A und Bild A. Wenden Sie dann in einem zweiten Schritt das Gram–Schmidt Verfahren an. Bei der Anwendung des Gram–Schmidt Verfahrens für die Basis von Kern A kann ein einfacher Taschenrechner verwendet werden.

12.2b) Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ in sich.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \boldsymbol{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

1. Durch welche Matrix A wird F (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) beschrieben?
2. Untersuchen Sie, wie sich Abbildung F auf die Norm eines Vektors auswirkt, d.h. vergleichen Sie $\|F(\boldsymbol{x})\|$ und $\|\boldsymbol{x}\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 12.3 Multiple Choice: Linearität von Abbildungen

Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht, und geben Sie eine Begründung an.

12.3a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3d) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3e) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, F die Identität

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3f) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 1$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3g) $F : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$ (Hier bezeichnet $C^2(\mathbb{R})$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3h) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, F beschreibt die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

12.3i) $F : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x,y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen $\sin$ und $\cos$ ist, deren Graph durch die Punkte $(-1,x)$ und $(1,y)$ geht. (Hier bezeichnet $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

(i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Aufgabe 12.4 Abbildungsmatrix einer Polynomabbildung

Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_3 & \to & \mathbb{P}_3 \\ p(t) & \mapsto & p''(t) + tp'(t) \end{array}$$

12.4a) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

12.4b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von F bezüglich der Monombasis $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$ von $\mathbb{P}_3$.

12.4c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 = \{1 + t^3, t - t^2, t^2 + t^3, t^3\} \subseteq \mathbb{P}_3$.

Veröffentlichung am 6. Dezember 2016.

Abzugeben bis 14. Dezember 2016.