R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 13

Aufgabe 13.1 Beispiel einer Koordinatentransformation

Gegeben seien zwei die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

13.1a) Finden Sie die Koordinatentransformationsmatrix $\mathbf{S}$, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

13.1b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 13.2 Matrixpotenzen und Eigenwerte

Diese Aufgabe ist eine Vorbereitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren und zeigt gleichzeitig eine mögliche Anwendung auf. Wir suchen eine einfache Methode um $A^{100}\boldsymbol{x}$ zu berechnen für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.2a) Wenn $\boldsymbol{x}$ ein Vektor ist mit der Eigenschaft $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, was ist dann $A^k\boldsymbol{x}$ für $k = 1, 2, \ldots$?

Wir suchen daher Paare $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

13.2b) Demonstrieren Sie, dass die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ für ein gegebenes λ ein homogenes, lineares Gleichungssystem darstellt. Wie sieht die zugehörige Koeffizientenmatrix aus?

13.2c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante Werte von λ, für die $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ Lösungen $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

Aufgabe 13.3 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

13.3a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.3b) * Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B mithilfe von MATLAB. Verwenden Sie dazu den MATLAB-Befehl `eig`. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren eigenen Resultaten aus 13.3a). Kommentieren Sie.

Tipp: Computer rechnen mit endlicher Genauigkeit.

Aufgabe 13.4

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.4a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

13.4b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

Tipp: Sie können verwenden, dass A symmetrisch ist.

13.4c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Aufgabe 13.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen.

13.5a) Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A, dann ist $\boldsymbol{x}$ auch ein Eigenvektor von A^2.

(i) Richtig,

(ii) Falsch.

13.5b) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2.

(i) Richtig,

(ii) Falsch.

13.5c) Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, dann ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von $A + B$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

13.5d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

13.5e) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I_n$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

13.5f) Ist $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \neq 0$, dann hat $A = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}^\top$ den Eigenvektor $\boldsymbol{u}$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

Aufgabe 13.6 Orthogonale Projektion

Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

13.6a) Durch welche Matrix A wird F bezüglich der Standardbasis beschrieben?

13.6b) Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

13.6c) Bestimmen Sie Bild A und dim(Bild A).

Veröffentlichung am 13. Dezember 2016.
Abzugeben bis 21. Dezember 2016.