

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 14

Aufgabe 14.1

14.1a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A &= \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, & \text{(ii)} \quad B &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{(iii)} \quad C &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tip: Für (iii): Das Polynom $-x^3 + 6x^2 - 32$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = -2$.

14.1b) Verwenden Sie MATLAB, um die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren in 14.1a) zu verifizieren. Zudem benutzen Sie MATLAB, um Diagonalmatrizen D_A, D_B, D_C und reguläre Matrizen T_A, T_B, T_C zu finden, sodass $A = T_A D_A T_A^{-1}$, $A = T_B D_B T_B^{-1}$ und $C = T_C D_C T_C^{-1}$. Existieren diese Matrizen in jedem Fall?

Aufgabe 14.2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14.2a) Bestimmen Sie Matrizen T und D , für die gilt

$$T^{-1}AT = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist.

14.2b) Kann T als orthogonal gewählt werden? Wenn ja, geben Sie ein solches T an.

Aufgabe 14.3

14.3a) Zu den Zeiten $t_i, i = 1, \dots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Wir setzen die unbekannte Funktion $f(t)$ als Linearkombination an der bekannten Funktionen $\phi_j(t), j = 1, \dots, 4$, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t}, \phi_2(t) = \frac{1}{t^2}, \phi_3(t) = e^{-(t-1)}, \phi_4(t) = e^{-2(t-1)}, \text{ also } f(t) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j \phi_j(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten γ_j der Linearkombination so, dass

$$\sum_{i=1}^{10} [f(t_i) - f_i]^2 \quad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB. Bilden Sie die Gauss'schen Normalgleichungen, und lösen Sie diese mit der LR-Zerlegung, d.h. durch Linksdivision.

Veröffentlichung am 20. Dezember 2016.

Abzugeben bis ; keine Abgabe.