R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 1

Aufgabe 1.1

Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & y & = a \\ x & + & ay & = a \end{array} .$$

Welche Aussagen treffen zu?

(i) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und ein solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.

√ (ii) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.

√ (iii) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x + y = -1$ und $x - y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir das widersprüchliche Gleichungssystem: $x - y = 1$ und $x - y = -1$.

(iv) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

Ein LGS hat entweder **keine**, **genau eine** oder aber **unendlich viele** Lösungen. Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als **eine** Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.

√ (v) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.

Aufgabe 1.2

Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

1.2a) $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2;$

1.2b) $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1.$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für **a)** bzw. **b)** schrittweise ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrr|r|rl} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 & (-1) \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 & (-1) \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 & (-1) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r|rl} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & (-2) \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 & (-3) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r|rl} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 & \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 & (-5/2) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 \end{array}$$

Es folgt, indem man zuerst x_4, dann x_3, x_2 und x_1 ausrechnet:

a) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$ und die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(3, \frac{7}{2}, -4, \frac{5}{4} \right) \right\}.$$

b) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11.$ und die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \{(-11, -7, 14, -5)\}.$$

Aufgabe 1.3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|cl} x_1 & x_2 & x_3 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 & \\ 3 & 4 & 2 & 8 & (-3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x + y + z = 1$ und $x + y + z = 0$) oder unendlich viele. Hier hat man unendlich viele Lösungen: für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2 + 5x_3 = 5$ gilt. Formell schreiben wir: $x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{5 - 5t}{-5} = t - 1 \text{ und } x_1 = 1 - 3(t - 1) + t = 4 - 2t.$$

Die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems ist also

$$\mathcal{L} = \{(4 - 2t, t - 1, t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 1.4

In der Vorlesung haben wir zur Ausführung des Gauss-Algorithmus folgende zwei Elementaroperationen verwendet:

(I) Vertauschen von Zeilen,

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Versuchen Sie durch geschicktes Kombinieren von Operation *(II)* das Vertauschen von Zeilen zu erreichen.

Das würde bedeuten, man benötigt lediglich Operation *(II)* um das Gauss-Verfahren auszuführen.

Lösung: Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a-te und b-te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a-ten Zeile	Inhalt der b-ten Zeile
	X	Y
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	X	$X + Y$
von Zeile a Zeile b subtrahieren	$-Y$	$X + Y$
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	$-Y$	$X.$

Bis auf das Vorzeichen in der Zeile a haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen, ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a-ten Zeile und X in der b-ten Zeile steht.

Veröffentlichung am 21. September 2016.

Abzugeben bis 28. September 2016.