R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 2

Aufgabe 2.1

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS $2x_1 + 3x_2 = a$, $x_1 + 3/2x_2 = 3$ keine Lösung für $a \neq 6$. Für $a = 6$ hat es unendlich viele Lösungen.

(ii) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 1/2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

keine Lösung.

(iii) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.

√ (iv) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Aufgabe 2.2

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

2.2a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

2.2b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

2.2c) eindeutig lösbar ist,

2.2d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
3 & 2b & 4 & 5 \\ \hline
3 & 0 & 4 & 5 \\ \hline
0 & 2b & 3a & b
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{r|r|r|l}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
3 & 2b & 4 & 5 \\ \hline
0 & -2b & 0 & 0 \\ \hline
0 & 2b & 3a & b
\end{array}
\;(*)
$$

<u>**Fall** $b = 0$:</u> Zeilen vertauschen ergibt

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
3 & 0 & 4 & 5 \\ \hline
0 & 0 & 3a & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

i) <u>$a = 0$:</u> Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\beta, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

ii) <u>$a \neq 0$:</u> Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \alpha, 0 \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>**Fall** $b \neq 0$:</u> Hier ist $-2b$ Pivot bei $(*)$:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
3 & 2b & 4 & 5 \\ \hline
0 & -2b & 0 & 0 \\ \hline
0 & 2b & 3a & b
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{r|r|r|l}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
3 & 2b & 4 & 5 \\ \hline
0 & -2b & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 3a & b
\end{array}
$$

i) <u>$a = 0$:</u> In diesem Fall gibt es keine Lösung.

ii) <u>$a \neq 0$:</u> Die Lösung ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}, 0, \frac{b}{3a} \right) \right\}.$$

Folglich gilt **a)** falls $a = 0$, $b = 0$, **b)** falls $a \neq 0$, $b = 0$, **c)** falls $a \neq 0$, $b \neq 0$, **d)** falls $a = 0$, $b \neq 0$.

Aufgabe 2.3 Zeilenstufenform

Entscheiden Sie für jede Teilaufgabe, ob das vorliegende lineare Gleichungssystem in Zeilenstufenform ist und überführen Sie es gegebenenfalls in Zeilenstufenform mit Hilfe des Gauss–Algorithmus aus der Vorlesung.

Bestimmen Sie für jede Teilaufgabe den Rang des Schemas gemäss der Definition aus den Vorlesungsnotizen (Seite 21), sowie die Lösungsmenge.

2.3a)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & b_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & b_2 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & b_3 \end{array}$$

Lösung: Dieses Schema ist bereits in Zeilenstufenform. Der Rang ist 3. Es gilt, dass $x_5 = b_3 - x_4$ und $x_2 = b_2 - x_3$. Durch rückwärts Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir, dass $x_1 = b_1 - b_2 + x_3$. Die Variablen x_3 und x_4 sind noch frei zu wählen. Wir benennen diese mit α und β. Die Lösungsmenge ist eine Schar von Lösungen mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L} = \{(b_1 - b_2 + \alpha, b_2 - \alpha, \alpha, \beta, b_3 - \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

2.3b)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & b_1 \\ & & & & & & x_4 & & & = & b_2 \\ & & & & & & & & x_5 & = & b_3 \end{array}$$

Lösung: Das Schema ist bereits in Zeilenstufenform. Der Rang ist 3. Die Lösungsmenge ist eine Schar von Lösungen. Wir benutzen $x_4 = b_2$ und erhalten, dass $x_1 = b_1 - x_2 - x_3 - 2b_3$. Die Variablen x_2 und x_3 sind noch frei zu wählen. Wir benennen diese mit α und β. Die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{(b_1 - \alpha - \beta - 2b_3, \alpha, \beta, b_2, b_3) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2.3c)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & = & b_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & & = & b_2 \\ & & & & & & & x_5 & & & = & b_3 \\ & & & & & & & & & x_6 & = & b_4 \end{array}$$

Lösung: Das Schema ist bereits in Zeilenstufenform. Der Rang ist 4. Es gilt, dass $x_6 = b_4$ und $x_5 = b_3$. Wir setzen $x_3 = \alpha$ und $x_4 = \beta$ als frei Parameter und erhalten, dass $x_1 = b_1 - \alpha - 2\beta$ und $x_2 = b_2 - \alpha + \beta$. Die Lösungsmenge ist dann gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{(b_1 - \alpha - 2\beta, b_2 - \alpha + \beta, \alpha, \beta, b_3, b_4) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2.3d)

$$x_1 - x_2 = b_1$$

Lösung: Das Schema ist bereits in Zeilenstufenform. Der Rang ist 1. Die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{(b_1 + \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.3e)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & x_4 & & & = & b_1 \\ & x_2 & & - & x_4 & & & = & b_2 \\ & & x_3 & - & x_4 & & & = & b_3 \\ & & x_3 & & & + & x_5 & = & b_4 \\ & & x_3 & & & & & = & b_5 \end{array}$$

Lösung: Das Schema ist noch nicht in Zeilenstufenform. Wir wenden zunächst den Gauss–Algorithmus an. Das Pivot ist jeweils eingekreist.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	
1	0	0	-1	0	b_1	
0	1	0	-1	0	b_2	
0	0	1	-1	0	b_3	
0	0	1	0	1	b_4	(-1)
0	0	1	0	0	b_5	(-1)

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	-1	0	b_1
0	1	0	-1	0	b_2
0	0	1	-1	0	b_3
0	0	0	1	1	$b_4 - b_3$
0	0	0	1	0	$b_5 - b_3$

Im zweiten Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	
1	0	0	-1	0	b_1	
0	1	0	-1	0	b_2	
0	0	1	-1	0	b_3	
0	0	0	1	1	$b_4 - b_3$	
0	0	0	1	0	$b_5 - b_3$	(-1)

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	-1	0	b_1
0	1	0	-1	0	b_2
0	0	1	-1	0	b_3
0	0	0	1	1	$b_4 - b_3$
0	0	0	0	-1	$b_5 - b_4$

Durch rückwärts Einsetzen erhalten wir, dass $x_5 = b_4 - b_5$ und $x_4 = b_4 - b_3 - x_5 = b_5 - b_3$. Weiter erhalten wir, dass $x_3 = b_3 + x_4 = b_5$, $x_2 = b_2 + x_4 = b_2 - b_3 + b_5$ und $x_1 = b_1 + x_4 = b_1 - b_3 + b_5$. Die Lösungsmenge gegeben ist durch:

$$\mathcal{L} = \{(b_1 - b_3 + b_5, b_2 - b_3 + b_5, b_5, b_5 - b_3, b_4 - b_5)\}.$$

Aufgabe 2.4

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.4a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektoren Lösungen zu dem ersten LGS (mit $\boldsymbol{b}$ als rechter Seite) sind:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Man berechnet das Matrix–Vektor–Produkt:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-5) + (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das heisst, dass $\boldsymbol{x} = (-2, -5, 3)^\top$ eine Lösung des LGS ist. Man berechnet analog, dass $\boldsymbol{x} = (4, 7, -3)^\top$ auch eine Lösung des LGS ist.

2.4b) Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektoren Lösungen zu dem zweiten LGS (mit $\boldsymbol{c}$ als rechter Seite) sind:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Man berechnet das Matrix–Vektor–Produkt:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{c}.$$

Das heisst, dass $\boldsymbol{x} = (3, 1, 0)^\top$ keine Lösung des LGS ist. Hingegen ist $\boldsymbol{x} = (4, 3, 0)^\top$ eine Lösung.

Veröffentlichung am 28. September 2016.

Abzugeben bis 5. Oktober 2016.