R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 3

Aufgabe 3.1

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar?

(i) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Z.B. existiert für keinen der drei Vektoren $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

(ii) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Für $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert immer mindestens die Lösung $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine andere Argumentation: setzt man in $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ irgendwas für x ein, so erhält man einen Vektor $\boldsymbol{b}$ für den dieses $\boldsymbol{x}$ eine Lösung ist.

√ (iii) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(iv) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

Falsch. Nimmt man für b den Nullvektor, so existiert mit $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung, aber $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ wird durch diese Ungleichung ausgeschlossen.

(v) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right) (-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right) (1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right).$$

Also gibt es eine Lösung für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

Aufgabe 3.2

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.2a) Bestimmen Sie mit dem Gauss–Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Lösung: a) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ oder $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ entspricht jeweils einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Man kann beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \; (1/3) \quad \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Für $\boldsymbol{b}$ folgt also:

$$\begin{aligned} &x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 2x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = 1 - 2t, \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = 1 - t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist also

$$\mathcal{L} = \Big\{ (1 - t, 1 - 2t, t) \Big| t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Für $\boldsymbol{c}$ folgt analog

$$\begin{aligned} &x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = s \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 2x_3 = 3 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - 2s, \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \;\Rightarrow\; x_1 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = 4 - s. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ist somit

$$\mathcal{L} = \Big\{ (4 - s, 3 - 2s, s) \Big| s \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Aufgabe 3.3

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt . . .

3.3a) $(AB)^T = A^T B^T$,

(i) richtig

$\surd$ (ii) falsch

Die Formel $(AB)^T = A^T B^T$ ist im Allgemeinen falsch, so auch in diesem Beispiel. Nachrechnen zeigt: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 21 & 25 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 15 & 24 & 24 \\ 17 & 17 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^T B^T$ was schon von den Matrixdimensionen her keine Gleichheit sein kann. Aber auch für quadratische Matrizen A, B derselben Grösse ist die Formel im Allgemeinen falsch.

3.3b) $(AB)^T = B^T A^T$,

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig! Diese Formel ist sogar im Allgemeinen richtig (sofern das Produkt AB definiert ist). Rechnung: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B^T A^T$.

3.3c) $A^T A$ ist symmetrisch,

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist $A^T A$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, denn $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$. Und eine Matrix M ist per Definition genau dann symmetrisch, wenn $M^T = M$ gilt.

3.3d) AA^T ist symmetrisch.

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist AA^T eine symmetrische $m \times m$-Matrix, denn $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Bemerkung: $A^T A$ und AA^T sind beide symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht gleich (z.B. wenn $n \neq m$).

3.3e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Ja, es gilt $(C+C^T)^T = C^T+(C^T)^T = C^T+C = C+C^T$. Bemerkung: wäre C nicht quadratisch, so wäre $C + C^T$ nicht definiert.

Es gilt allgemein: $(AB)^T = B^T A^T$ falls A eine $m \times p$ und B eine $p \times n$-Matrix ist. Die Anzahl Spalten von A und die Anzahl Zeilen von B (beide gleich p) müssen übereinstimmen, damit AB definiert ist - das Produkt $B^T A^T$ ist dann automatisch auch definiert.

Herleitung der Formel (nur die Notation ist ein bisschen tricky):

Es sei $C = AB$ und a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} bezeichne die Einträge der jeweiligen Matrizen (der erste Index ist die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer). Weiter seien α_{ij}, β_{ij} die Einträge der Matrizen A^T, B^T. Aus der Definition der Transponierten folgt $\alpha_{ij} = a_{ji}, \beta_{ij} = b_{ji}$, und die Definition der Matrizenmultiplikation liefert $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Nun ist der Eintrag (i, j) der Matrix $(AB)^T$ gleich (beachte die vertauschten Indices) $c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} \alpha_{kj}$ und dieser Ausdruck entspricht auch dem Eintrag (i, j) der Matrix $B^T A^T$.

Aufgabe 3.4

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3.4a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$AB,\ BA,\ A\boldsymbol{x},\ A^2 := AA,\ B^2 := BB,\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T,\ B^T\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}^T B.$

Lösung: a) Es gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -1 & -1 \\ -17 & 15 & -22 \\ -11 & -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -20$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix}$$

$$B^T\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}^T B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixprodukte BA, B^2 und $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$ sind nicht definiert.

Veröffentlichung am 4. Oktober 2016.
Abzugeben bis 12. Oktober 2016.