R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu



ETH Zürich
D-MATH

# Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

## Beispiellösung für Serie 4

### Aufgabe 4.1 Invertieren einer 3x3 Matrix mit dem Gauss-Jordan Algorithmus

**4.1a)** Sei die folgende matrix gegeben

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse von $A$ mit dem Gauss-Jordan Algorithmus.

**Tipp:** Schreibe die Indentitätsmatrix neben $A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dann:

1. Verwende das Gauss Verfahren, um die linke Matrix in eine obere Dreiecksmatrix umzuformen. Wende stets die Schritte auch auf die rechte Matrix an.
2. Nun wende das Gauss Verfahren auch, um die rechte Matrix (obere Dreiecksmatrix) in die Identitätsmatrix zu überführen. Wende wieder stets die Schritte auch auf die rechte Matrix an.

**Lösung:**

Die erweiterte Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Durch das Gauss Verfahren erhalten wir

$$\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \frac{3}{4} \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} (-1) \\ (\frac{1}{4}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Die Inverse von $A$ ist daher gleich

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 4.2

**4.2a)** Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Aus dieser möchten wir die zweite Zeile extrahieren. Das wollen wir tun, indem wir eine Matrix $\mathbf{B}$ finden, sodass entweder $\mathbf{BA} = (2, -5)$ oder $\mathbf{AB} = (2, -5)$. Für welche der folgenden Matrizen ist dies möglich?

(i) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine $3 \times 2$ Matrix.

(ii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine $2 \times 2$ Matrix.

(iii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine $3 \times 3$ Matrix.

$\surd$ (iv) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

(v) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von rechts nicht möglich.

**4.2b)** Wie oben beschrieben, möchten wir nun die erste Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ extrahieren. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(i) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von links nicht möglich.

(ii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine $3 \times 2$ Matrix.

(iii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt zweite Zeile von $A$.

(iv) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von links nicht möglich.

√ (v) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

## Aufgabe 4.3

Sei $\mathbf{I}_2$ die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

**4.3a)** Für welche Werte des Parameters $\alpha$ ist die Matrix $\mathbf{V} := \mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top$ orthogonal?

**Lösung:** Wir können die gesuchten Werte von $\alpha$ wie folgt finden: $\mathbf{V}$ ist orthogonal, falls $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_2$. Da $\mathbf{I}_2^\top = \mathbf{I}_2$ und $(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top)^\top = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top$, folgt

$$\mathbf{V}^\top = (\mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top)^\top = \mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top = \mathbf{V}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{V}\,\mathbf{V} &= (\mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top)\,(\mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top) \\ &= \mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_2\,\alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top + \alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top\,\alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top \\ &= \mathbf{I}_2 - 2\alpha \mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top + \alpha^2 \mathbf{u}\,\underbrace{\mathbf{u}^\top\,\mathbf{u}}_{=1}\,\mathbf{u}^\top \\ &= \mathbf{I}_2 + (\alpha^2 - 2\alpha)\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top. \end{aligned}$$

(Bemerkung: $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top$ ist eine $2 \times 2-$Matrix, aber $\mathbf{u}^\top\,\mathbf{u}$ ist eine reelle Zahl (oder $1 \times 1-$Matrix).)

Weiter, da $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top \neq \mathbf{O}$, gilt $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ genau dann, wenn $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, also für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$. Für $\alpha = 0$ ist $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ trivialerweise orthogonal.

Allgemeiner ist eine $n \times n$-Matrix von der Form $\mathbf{I}_n - 2u\,\mathbf{u}^\top$ mit $\mathbf{u}^\top\,\mathbf{u} = 1$ immer orthogonal. Man nennt eine solche Matrix *Householder-Matrix*.

**4.3b)** Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von $\alpha$ das Gleichungssystem

$$\mathbf{V}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

**Lösung:** <u>Für $\alpha = 0$:</u>

$$\mathbf{V}\,x = \mathbf{I}_2\,\mathbf{x} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Für $\alpha = 2$:</u> Da $\mathbf{V}$ orthogonal und symmetrisch ist, gilt $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\top = \mathbf{V}$. Also:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** Für eine Householder-Matrix $\mathbf{Q}$ gilt immer $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}$. Dies folgt aus

$$(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top)^\top = \mathbf{I}_n - 2(\mathbf{u}^\top)^\top\,(\mathbf{u})^\top = \mathbf{I}_n - 2\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top.$$

## Aufgabe 4.4

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

wobei $\phi = \pi/3$. Zeichnen Sie das Dreieck mit den Ecken $a$, $b$, $c$. Wenden Sie die Matrix $R$ auf die Vektoren an und zeichnen Sie auch das entsprechende neue Dreieck. Was bedeutet das Anwenden von $R$ geometrisch?

**Lösung:** Die Matrix $R$ dreht das Dreieck um den Winkel $\phi$ um den Ursprung, wie in der Abbildung ersichtlich.

## Aufgabe 4.5

**4.5a)** Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.

√ (i) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zum Berechnen dieser Matrix wählt man einen Punkt von **F**, und betrachtet seine Koordinaten im gefärbten **F**, (z.B. $(1,0)^T$) sowie im weissen **F** (z.B. $(0,-1)$). Man wiederholt das für einen zweiten Punkt, und erhält

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man $A$ berechnen, entweder durch Invertieren von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$, oder indem man die Gleichungen für jeden Eintrag aufschreibt und auflöst.

**4.5b)** Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

√ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Siehe Erklärung zu **(a)**.

**4.5c)** Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte **F** in das weisse **F** überführt.

(i) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

√ (ii) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

Siehe Erklärung zu **(a)**.

Veröffentlichung am 11. Oktober 2016.
Abzugeben bis 19. Oktober 2016.