R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 5

Aufgabe 5.1

5.1a) Seien $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ Lösungen des LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig. Dies ist Satz I.2 aus den Vorlesungsnotizen.

5.1b) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ein homogenes LGS und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.

(i) richtig

√ (ii) falsch

Falsch. Das homogene LGS hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $r < n$.

5.1c) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang r kleiner als die Anzahl m der Gleichungen.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig. Das LGS ist genau dann nicht für alle $\boldsymbol{b}$ lösbar, wenn $r < m$.

5.1d) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ sei eine Lösung des homogenen LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{v}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Dann hat $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig. Weil das homogene LGS eine nichttriviale Lösung besitzt, ist der Rang $r < n$. Und weil das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{v}$ eine Lösung besitzt, kann diese nach Satz 1.2 der Vorlesung nicht eindeutig sein. Konkret ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{u}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: Es gilt nämlich $A(\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{v} + \lambda A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \lambda \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$.

Aufgabe 5.2

5.2a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig, denn $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$. Die Regel $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ folgt aus $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$ (der erste Schritt benutzt $(AB)^T = B^T A^T$, vgl. Satz 2.4(iii) im Buch).

5.2b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Richtig. $A^T A = I$ gilt genau für diese beiden Werte. Nachrechnen liefert:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}+\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4}+\frac{5}{8} & \frac{a^2}{4}-\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{a^2}{4}-\frac{3}{8} & \frac{a^2}{4}+\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(die Matrix muss symmetrisch sein, also beim Ausrechnen nicht unnötig arbeiten!) und $\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4} = 1$ hat genau die gegebenen Werte als Lösungen. Dies gilt ebenso für $\frac{a^2}{4} + \frac{5}{8} = 1$ und $\frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} = 0$.

5.2c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

(i) richtig

√ (ii) falsch

Falsch, eine orthogonale Matrix A besitzt immer die Inverse A^T, da per Definition $A^T A = I$ gilt und (für quadratische Matrizen) aus $XA = I$ immer $X = A^{-1}$ folgt.

Aufgabe 5.3

5.3a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ regulär ist.

Lösung: Nach Satz 2.8 aus dem Buch gilt für jede $n \times n$–Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \text{ ist regulär} \;\Leftrightarrow\; \text{das Gleichungssystem } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ hat nur die triviale Lösung } x = 0.$$

Also reicht es die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 3 & 1 & 0 & (-2) \\ 3 & 1 & 3 & 0 & (-3) \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & 0 & (2) \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Die einzige Lösung hier ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, deshalb ist $\mathbf{A}$ regulär.

5.3b) Für welche Werte des Parameters γ ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

Lösung: Aus Satz 2.8 folgt auch für jede $n \times n$–Matrix $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} \text{ ist singulär} \;\Leftrightarrow\; \text{das Gleichungssystem } \mathbf{Bx} = 0 \text{ hat nichttriviale Lösungen.}$$

Deshalb betrachten wir die Lösungsmenge von $\mathbf{Bx} = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \gamma & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 & \\ 2 & \gamma & 4 & 0 & (-2) \\ -1 & -1 & \gamma & 0 & (1) \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow\; \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 & \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 & (4 - \gamma) \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (4 - \gamma)(\gamma + 2) & 0 \end{array}$$

Falls $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$ ist, ist $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter und $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ besitzt nichttriviale Lösungen. Somit ist $\mathbf{B}$ singulär für $\gamma \in \{-2, 4\}$.

Aufgabe 5.4 Rundungsfehler

In dieser Aufgabe sollen Sie wie ein (leistungsschwacher) Computer mit der fixen Anzahl von 4 Dezimalstellen rechnen. Runden Sie also jedes Zwischenergebnis bis auf 4 Dezimalstellen:

$$0.m_1m_2m_3m_4 \cdot 10^E, \text{ mit } m_1 \neq 0, \ E \in \mathbb{Z},$$

bevor Sie weiterrechnen. So wird z.B. aus

$$0.0100101 = 0.100101 \cdot 10^{-1} \approx 0.1001 \cdot 10^{-1}\,.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$
$$\text{mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4a) mithilfe der gewöhnlichen LR-Zerlegung.

Lösung:

	x_1	x_2	1
	10^{-4}	1	1
$\mathrm{II} - (-10^4) \cdot \mathrm{I}$	-1	1	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	1
10^{-4}	1	1
$\boxed{-10^4}$	$0.10001 \cdot 10^5 \approx 10^4$	10^4

Somit bekommen wir

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^4 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 10^4 \end{pmatrix}$$

und aus $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ erhalten wir $\mathbf{y} = (1,\ 10^4)^\top$, also die Lösung

$$\mathbf{x} = (0,\ 1)^\top$$

aus $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

5.4b) mithilfe der LR-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie. Die Spaltenmaximumstrategie bedeutet, bei jedem Schritt des Gauss–Algorithmus Zeilen zu vertauschen, sodass das Pivot im Absolutbetrag jeweils maximiert wird.

Lösung: Wir bemerken, dass der Absolutbetrag des zweiten Eintrags der ersten Zeile grösser ist, als jener der ersten. Deshalb müssen wir beim Rechnen mit der Spaltenmaximumstrategie die erste mit der zweiten Zeile vertauschen und starten mit folgendem Schema:

		x_1	x_2	1
0	1	-1	1	0
1	0	10^{-4}	1	1

$\rightarrow$

		x_1	x_2	1
0	1	-1	1	0
1	0	$\boxed{-10^{-4}}$	$1.0001 = 0.10001 \cdot 10 \approx 1$	1

Somit bekommen wir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-4} & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und aus $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{b}$ erhalten wir $\mathbf{y} = (0,\ 1)^\top$, also die Lösung

$$\mathbf{x} = (1,\ 1)^\top$$

aus $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

5.4c) Was stellen Sie fest, wenn Sie die Resultate aus 5.4a) und 5.4b) vergleichen? Versuchen Sie, eine Erklärung dafür zu geben.

Lösung: Vergleichen wir die beiden Resultate, stellen wir fest, dass sie völlig unterschiedlich sind. Das exakte Resultat (ohne Runden) können wir aus dem Endschema von Teilaufgabe 5.4b) einfach ablesen:

$$\mathbf{x} = (\frac{1}{1.0001}, \frac{1}{1.0001})^\top .$$

Dies entspricht nach Rundung des exakten Ergebnisses auf drei Nachkommastellen dem Ergebnis aus 5.4b). Das Ergebnis aus 5.4a) ist hingegen vollkommen falsch. Grund dafür sind die starken Grössenunterschiede der Pivotelemente in 5.4a) von 10^{-4} und 10000. Diese führen beim Weiterrechnen zu grossen numerischen Rundungsfehlern. Durch die Pivotisierung mithilfe der Spaltenmaximumstrategie in 5.4b) wurde solch eine schlechte Skalierung verhindert. Die berechneten Pivotelemente sind -1 und 1, welche den exakten Werten sehr nahe kommen.

Aufgabe 5.5 Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

5.5a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ regulär?

Tipp: Überlegen Sie sich, wieso eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn das Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = 0$ *nur* die triviale Lösung $\mathbf{x} = 0$ hat, und verwenden Sie diese Tatsache.

Lösung: Für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = 0$ *immer* die Lösung $\mathbf{x} = 0$. Wenn der Rang von $\mathbf{M}$ kleiner als n ist, ergeben sich ausserdem noch unendlich viele weitere Lösungen, weil es mindestens eine Spalte gibt, die keine Pivot-Spalte ist. Weil eine $n \times n$-Matrix genau dann regulär (= invertierbar) ist, wenn sie vollen Rang hat, folgt für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M}$:

$$\text{das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \Rightarrow \mathbf{M} \text{ ist regulär.}$$

Ausserdem haben Sie in der Vorlesung gesehen, dass jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn zu jedem $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ *genau eine* Lösung hat. Also gilt für jede $n \times n$–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \text{ ist regulär } \Rightarrow \text{ das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \mathbf{x} = 0.$$

Zusammen bedeuten die obigen beiden Implikationen für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M}$ folglich

$$\mathbf{M} \text{ ist regulär } \Leftrightarrow \text{ das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \mathbf{x} = 0.$$

Also reicht es, die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

Fall $a \neq 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang 1 genau dann, wenn $d - \frac{bc}{a} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Fall $a = 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang < 2 genau dann, wenn entweder b oder c Null ist, also wenn $bc = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

5.5b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: Sei $\mathbf{A}$ regulär, also $ad-bc \neq 0$. Damit wissen wir, dass die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ existiert. Setze $\mathbf{X} := \mathbf{A}^{-1}$ und benutze die Notationen

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ folgt, dass $\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{e}_1$ sowie $\mathbf{Ax}_{(2)} = \mathbf{e}_2$ gelten muss. Insofern entspricht $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ einem Gleichungssystem mit zwei rechten Seiten. Wir lösen es mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Fall $a \neq 0$: Es folgt

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right)$$

Für $\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{e}_1$ folgt:

$$\begin{cases} x_{21} = \frac{-\frac{c}{a}}{d-\frac{bc}{a}} = \frac{-c}{ad-bc}, \\ x_{11} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bc}{ad-bc}\right) = \frac{d}{ad-bc}. \end{cases}$$

Für $\mathbf{Ax}_{(2)} = \mathbf{e}_2$ folgt:

$$\begin{cases} x_{22} = \frac{1}{d-\frac{bc}{a}} = \frac{a}{ad-bc}, \\ x_{12} = \frac{1}{a}\left(0 - \frac{ab}{ad-bc}\right) = \frac{-b}{ad-bc}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Genauso gut könnten wir hier den sogenannten Gauss-Jordan-Algorithmus zur Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ durchführen: Dabei wird als rechte Seite die ganze Einheitsmatrix in das (vom Gauss-Algorithmus bekannte) Schema geschrieben und der Gauss-Algorithmus auf dieses erweiterte System angewendet, um das Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu bringen (insbesondere werden beim Gauss-Jordan-Algorithmus also auch die Einträge oberhalb jeder 1 in den

Pivotspalten durch Abziehen entsprechender Vielfache der Pivotzeilen eliminiert – die daraus resultierende Form wird in der Vorlesung Zeilenstufenform genannt). Im Falle einer invertierbaren Matrix steht danach auf der linken Seite die Einheitsmatrix, während auf der rechten Seite die Inverse abgelesen werden kann. In Aufgabe 4.1 der nächsten Serie, Serie 4, erhalten Sie ein weiteres Übungsbeispiel; hier ist der Gauss-Jordan-Algorithmus am Beispiel unserer allgemeinen 2×2-Matrix illustriert.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \left(-\tfrac{c}{a}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \left(\tfrac{ad-bc}{a}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) (-b) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{a}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

<u>Fall $a = 0$:</u> Da $ad - bc \neq 0$ gilt, gilt $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Es folgt

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Für $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{e}_1$ folgt:

$$\begin{cases} x_{21} = \frac{1}{b}\big(= \frac{-c}{ad-bc}, \text{ da } a = 0\big), \\ x_{11} = \frac{1}{c}\big(0 - \frac{d}{b}\big)\big(= \frac{d}{ad-bc}\big). \end{cases}$$

Für $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{e}_2$ folgt:

$$\begin{cases} x_{22} = 0\big(= \frac{a}{ad-bc}\big), \\ x_{12} = \frac{1}{c}(1 - 0)\big(= \frac{-b}{ad-bc}\big). \end{cases}$$

Also gilt auch für $a = 0$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.6

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.6a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. entsprechende Matrizen L, R und P, für welche $PA = LR$ gilt.

Lösung: Wir gehen vor wie in den Notizen zu Kapitel 2 auf S. 35 beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ \mathbf{2/5} & 0 & 1/5 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ \mathbf{2/5} & 0 & 1/5 \\ \mathbf{-4/5} & 4/5 & 38/5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ \mathbf{-4/5} & 4/5 & 38/5 \\ \mathbf{2/5} & \mathbf{0} & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Somit können wir ablesen:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix},$$

und es gilt $PA = LR$.

5.6b) Füer $\boldsymbol{b} = (13, 29/5, 14)^T$ und $\boldsymbol{c} = (19, 39/5, -6)^T$ berechne die Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ der LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ mit einer LR-Zerlegung.

Lösung:

Die Matrizen P, L und R sind aus der ersten Teilaufgabe bekannt.

Um das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu lösen, betrachten wir betrachten wir zunächst das LGS $L\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{b}$.

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 29/5 \\ 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 29/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist das LGS $L\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{b}$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 29/5 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dann erhalten wir das folgende System

$$\begin{aligned} v_1 &= 13 \\ -\frac{4}{5}v_1 + v_2 &= 14 \\ \frac{2}{5}v_1 + v_3 &= \frac{29}{5}, \end{aligned}$$

welches die folgende Lösung hat

$$\begin{aligned}
v_1 &= 13\\
v_2 &= 14 + \frac{4}{5} \times 13 = \frac{122}{5}\\
v_3 &= \frac{29}{5} - \frac{2}{5} \times 13 = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Nun lösen wir das LGS $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$. Bezeichne $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, dann

$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 13\\
\frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 &= \frac{122}{5}\\
\frac{1}{5}x_3 &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned}
x_3 &= 3\\
x_2 &= \frac{5}{4}(\frac{122}{5} - \frac{38}{5} \times 3) = 2\\
x_1 &= \frac{1}{5}(13 - 2 \times 3 - 2) = 1.
\end{aligned}$$

Also $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$.

Für das LGS $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ lösen wir erst $L\boldsymbol{w} = P\boldsymbol{c}$.

$$\begin{aligned}
P\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19\\ 39/5\\ -6 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 19\\ -6\\ 39/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist das LGS $L\boldsymbol{w} = P\boldsymbol{c}$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -4/5 & 1 & 0\\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 19\\ -6\\ 39/5 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$, dann ergibt sich das folgende System:

$$\begin{aligned}
w_1 &= 19\\
-\frac{4}{5}w_1 + w_2 &= -6\\
\frac{2}{5}w_1 + w_3 &= \frac{39}{5},
\end{aligned}$$

welches die folgende Lösung hat

$$\begin{aligned} w_1 &= 19 \\ w_2 &= -6 + \frac{4}{5} \times 19 = \frac{46}{5} \\ w_3 &= \frac{39}{5} - \frac{2}{5} \times 19 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Nun lösen wir das LGS $R\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w}$. Bezeichne $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, dann

$$\begin{aligned} 5y_1 + y_2 + 2y_3 &= 19 \\ \frac{4}{5}y_2 + \frac{38}{5}y_3 &= \frac{46}{5} \\ \frac{1}{5}y_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

und die Lösung ist

$$\begin{aligned} y_3 &= 1 \\ y_2 &= \frac{5}{4}(\frac{46}{5} - \frac{38}{5} \times 1) = 2 \\ y_1 &= \frac{1}{5}(19 - 2 \times 1 - 2) = 3. \end{aligned}$$

Also $\boldsymbol{y} = (3, 2, 1)^T$.

Veröffentlichung am 18. Oktober 2016.

Abzugeben bis 26. Oktober 2016.