R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 6

Aufgabe 6.1 Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen

6.1a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{pmatrix},$$

Lösung: Wir führen den Gauss-Algorithmus durch:

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ e & 20 & \pi & 0.1 \\ -e & 30 & \pi & 0.2 \\ -e & 40 & \pi & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (+1) \\ (+1) \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 40 & 2\pi & 0.2 \\ 0 & 50 & 2\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-4) \\ (-5) \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.2 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-1) \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix} = e \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot (-0.3)$$

Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist also $-6\pi e$.

Nun führen wir den Gauss-Algorithmus für $\mathbf{B}$ aus:

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{B} &= \det \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x & z-x \\ 0 & y-x & z-x & u-x & u-x \\ 0 & y-x & z-x & u-x & v-x \end{pmatrix} \\
&= x \cdot \det \begin{pmatrix} y-x & y-x & y-x & y-x \\ y-x & z-x & z-x & z-x \\ y-x & z-x & u-x & u-x \\ y-x & z-x & u-x & v-x \end{pmatrix} = x \cdot \det \begin{pmatrix} y-x & y-x & y-x & y-x \\ 0 & z-y & z-y & z-y \\ 0 & z-y & u-y & u-y \\ 0 & z-y & u-y & v-y \end{pmatrix} \\
&= x(y-x) \det \begin{pmatrix} z-y & z-y & z-y \\ z-y & u-y & u-y \\ z-y & u-y & v-y \end{pmatrix} \\
&= x(y-x) \det \begin{pmatrix} z-y & z-y & z-y \\ 0 & u-z & u-z \\ 0 & u-z & v-z \end{pmatrix} \\
&= x(y-x)(z-y) \det \begin{pmatrix} u-z & u-z \\ u-z & v-z \end{pmatrix} = x(y-x)(z-y)(u-z)(v-u).
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ für alle 2×2-Matrizen gilt.

6.1b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
-2.94 & -4.65 & 4.41 & -0.15 & 1.31 & 0.00 & 2.18 & -2.08 & -0.14 & 2.64 \\
4.54 & -1.60 & 4.79 & -1.63 & 3.89 & 0.00 & 4.05 & -3.75 & -2.48 & -3.14 \\
1.47 & -0.37 & -1.20 & -4.73 & 3.87 & 0.00 & -0.45 & 3.27 & 0.11 & -1.76 \\
-1.69 & -0.68 & -4.80 & 3.56 & -0.60 & 0.00 & 2.26 & -4.18 & -1.22 & -2.73 \\
2.04 & -4.82 & -2.25 & -4.00 & 4.43 & 0.00 & 1.93 & -1.11 & -0.55 & 2.46 \\
3.20 & -3.97 & -2.47 & 1.00 & 4.64 & 0.00 & 0.56 & -2.35 & 0.90 & -1.26 \\
-3.78 & -2.56 & 3.63 & 4.94 & -0.04 & 0.00 & 2.01 & -1.29 & 3.97 & 3.28 \\
4.08 & -4.01 & -1.71 & 1.52 & 0.72 & 0.00 & -3.99 & -0.77 & -2.29 & -4.72 \\
1.08 & -0.43 & 2.78 & -3.60 & 0.02 & 0.00 & -4.54 & 4.45 & -4.67 & -3.84 \\
-4.44 & 2.97 & 4.25 & -1.88 & -1.85 & 0.00 & -3.15 & 4.25 & 2.02 & 3.19
\end{pmatrix}
$$

Lösung: Wir finden, dass die sechste Spalte eine Nullspalte ist, deshalb ist die Determinant von C ist Null. Das folgt, da $\det(C^T) = \det(C)$ (siehe Notizen zu Kapitel 3 S.13 (D10)) und die Determinant der Matrize mit einer Nullzeile ist Null (siehe Notizen zu Kapitel 3 S.9 (D6)).

Aufgabe 6.2 Determinante

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind für beliebige $(n \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

(i) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

$\det(2\mathbf{A}) = \det(2I_n\mathbf{A}) = \det(2I_n)\det(\mathbf{A}) = 2^n\det(\mathbf{A})$

√ (ii) $\det(\mathbf{A}^4) = (\det(\mathbf{A}))^4$

$\det(\mathbf{A}^2) = \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A})$ und entsprechend für $\det(\mathbf{A}^4)$.

(iii) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n}\cdot a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$ wenn $a_{i,j} = 0$ für $i+j > n+1$, d.h. es handelt sich um eine Dreiecksmatrix, bei welcher rechts unten Nullen stehen.

Nein. Ein einfaches Beispiel ist $n = 2$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{pmatrix} = -a_{1,2}a_{2,1}.$$

(iv) $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

Falsch, zum Beispiel ist $\det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 1$, aber $\det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 0$.

√ (v) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$

Stimmt: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{BA})$

√ (vi) Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, dann ist auch $\mathbf{AB}$ singulär.

Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, ist $\det(\mathbf{A}) = 0$. Daher ist $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}) = 0$, und somit ist $\mathbf{AB}$ auch singulär.

√ (vii) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^\top)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

Aufgabe 6.3

Multiple Choice: Bitte kreuzen Sie richtige Antworten an. Evtl. sind mehrere Antworten richtig.

6.3a) Sei A eine $n\times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

√ (i) $\det A = 0$,

(ii) $\det A \neq 0$.

Lösung: $\det A = 0$, da das Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $\det A \neq 0$ für beliebige rechte Seiten genau eine Lösung hat (siehe Satz III.1 in den Notizen oder Satz 3.11 im Buch).

6.3b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, √ (ii) $\det A \neq 0$.

Lösung: $\det A \neq 0$, siehe Satz III.1 in den Notizen oder Satz 3.11 im Buch.

6.3c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

√ (i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, √ (iii) $\det M = \pm 1$.

Lösung: $\det M \neq 0$ und $\det M = \pm 1$ sind richtig. Weil orthogonale Matrizen regulär / invertierbar sind folgt $\det M \neq 0$, und da $M^{-1} = M^T$ bei orthogonalen Matrizen, folgt dass $1 = \det I_n = \det(M^{-1}M) = \det(M^T M) \overset{\text{(D9)}}{=} \det M^T \cdot \det M \overset{\text{(D10)}}{=} (\det M)^2$, also $\det M = \pm 1$.

6.3d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. √ (ii) Falsch.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Gemäss der LR Zerlegung haben wir $PA = LR$. Da die Matrix L Einsen in der Diagonalen hat und eine Dreiecksmatrix ist, folgt $\det L = 1$ (siehe auch (D7) aus den Notizen auf S. 10). Die Matrix P ist orthogonal, dann $\det P = \pm 1$. Aus (D9) aus den Notizen auf S. 11 folgt

$$\det P \det A = \det L \det R \,,$$

und daraus (siehe auch "Pivot-Formel" auf S. 14 der Notizen):

$$\det A = (\det P)^{-1} \cdot \det L \cdot \det R = (\pm 1) \cdot \det R \cdot 1 = \pm 60 \,.$$

6.3e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, √ (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

Lösung: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$, damit $\det A = -1 \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = -2 - \alpha$ (siehe Buch, Gleichung (3.1) Seite 51).

6.3f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 4.1e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

√ (i) die leere Menge, (ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$, (iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Lösung: Das System $\begin{array}{r} -x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1/2 \end{array}$ hat keine Lösung.

Aufgabe 6.4

6.4a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, A eine $n \times n$–Matrix, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\,\mathrm{I}_n \;\text{ und }\; A\,\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (i) Die Determinante von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte sind nicht möglich.

Richtig, aus $A^2 = 2\mathrm{I}_n$ folgt $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(2\mathrm{I}_n) = 2^n$. Also erfüllt $\det A$ die quadratische Gleichung $x^2 = 2^n$.

√ (ii) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{u}$ hat die Lösung $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}$.

Richtig, aus $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ folgt $A^2\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ und mit $A^2\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$ folgt $2\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ oder $\mathbf{u} = A(\frac{1}{2}\mathbf{v})$.

Veröffentlichung am 25. Oktober 2016.
Abzugeben bis 2. November 2016.