R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Beispiellösung für Serie 7

Aufgabe 7.1

7.1a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man eine Zeilenoperation II (Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer andern) ausfuehrt. Wir bringen $\mathbf{A}$ also in Zeilenstufenform mit dem Gaussverfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-3) \\ (1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 2-6a & -4+5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ (2) \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6a & 6+5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (2a) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente, also $180 + 30a$.

7.1b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse?

Lösung: $\mathbf{A}$ hat eine Inverse für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, denn eine Matrix ist genau dann invertierbar wenn die Determinante nicht Null ist.

Aufgabe 7.2

7.2a) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit der Gausselimination (siehe Definition auf Seite 13):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \underline{r=2}\,,$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-4) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & -10 & -22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \underline{r=2}\,,$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r=4}\,.$$

7.2b) Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und von} \quad N = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Schauen Sie sich N genau an um langwierige Berechnungen zu vermeiden.

Lösung: Mit dem Gauss Algorithmus erhalten wir

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-3) \end{matrix}$$

$$= (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 1\cdot 3\cdot(-4) = 12\,.$$

$\det N = 0$, denn die Zeile 3 ist genau 2 mal die Zeile 2. Das folgt aus (D3) und (D4) aus den Notizen, da

$$0 = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \det(N).$$

Aufgabe 7.3

7.3a) Für die reelle Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $\mathbf{b} = (1, 2, 0)^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \ldots$

√ (i) keine Lösung.

(ii) eine eindeutige Lösung.

(iii) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(iv) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss sich $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten ausdrücken lassen. Da die dritte Spalte nur das zweifache der ersten ist, können wir diese ignorieren und versuchen $\mathbf{b}$ als Linearkombination der ersten beiden Spalten zu schreiben. Dies ist aber nicht möglich, da die dritte Komponente von $\mathbf{b}$ Null ist und daher der erste Spaltenvektor in der Linearkombination nicht vorkommen darf - und somit $\mathbf{b}$ also ein Vielfaches der zweiten Spalte sein müsste.

Alternativ kann man Gauss verwenden, um das System mit rechter Seite $\mathbf{b}$ in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

Aufgabe 7.4 Berechnen Sie ein Volumen mit der Determinante

Wir definieren das Kreuzprodukt von zwei Vektoren $(a_1, a_2, a_3)^T$ und $(b_1, b_2, b_3)^T$ als den Vector $\boldsymbol{d}$ mit Koordinaten:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_x + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_z,$$

wobei $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)^T$ und $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)^T$ die Einheitsvektoren sind. Der resultierende Vektor $\boldsymbol{d}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelograms, welches von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird.

7.4a) Sei $\boldsymbol{a} = (1,2,3)^T$ und $\boldsymbol{b} = (3,2,1)^T$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreicks mit den Eckpunkten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $(0,0,1)^T$.

Lösung: Wir verschieben die Punkte, sodass einer im Ursprung $(0,0,0)^T$ liegt. Das heisst wir betrachten das Dreick der Punkte $\widetilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} - (0,0,1)^T = (1,2,2)^T$ und $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} - (0,0,1)^T = (3,2,0)^T$ $(0,0,0)^T$. Wir berechnen das Kreuzprodukt über die Determinante und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -4\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag von $(-4,6,-4)^T$ ist $\sqrt{4^2+6^2+4^2} = 2\sqrt{17}$, welches gleich dem Flächeninhalt des Parallelograms mit Eckpunkten $\widetilde{\boldsymbol{a}}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}$, $\widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}}$ und $(0,0,0)^T$ ist. Daher ist der Flächeninhalt des gewünschten Dreiecks gleich $\sqrt{17}$.

7.4b) Sei $\boldsymbol{a} = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{b} = (3,2,1)^T$ und $\boldsymbol{c} = (0,0,1)^T$. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, welches von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannt wird, mit Hilfe der Determinante.

Lösung: Es gilt, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4.$$

Das gesuchte Volumen ist gleich 4.

Veröffentlichung am 2. November 2016.

Abzugeben bis 9. November 2016.