R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 8

Aufgabe 8.1

8.1a) Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

√ (i) A ist orthogonal.

(ii) A ist nicht orthogonal.

(iii) $|\det(A)| \neq 1$.

√ (iv) $\det(A) = 1$.

(v) $\det(A) = -1$.

Offensichtlich sind alle Spalten normiert. Die Spalten stehen auch orthogonal zueinander, denn das Skalarprodukt zweier Spalten ist Null, da sich die Einsen an verschiedenen Stellen befinden (das Produkt zweier Komponenten zweier verschiedener Spalten ist immer Null). Also ist A orthogonal.

Durch das Vertauschen von 10 Zeilen kann die Identitẗsmatrix erreicht werden, daher $\det(A) = (-1)^{10}\det(I_7) = 1$, was kurz demonstriert wird. Wir definieren für $i = 1, \dots, 7$ $\boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, wobei die "1" an der i-ten Position des Vektors $\boldsymbol{e}_i$ steht, der ansonsten Nullen enthält. Dann erhalten wir

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_6^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_5^T \\ \boldsymbol{e}_7^T \\ \boldsymbol{e}_4^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \end{pmatrix} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_6^T \\ \boldsymbol{e}_5^T \\ \boldsymbol{e}_7^T \\ \boldsymbol{e}_4^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \end{pmatrix} = (-1)^6 \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_6^T \\ \boldsymbol{e}_5^T \\ \boldsymbol{e}_7^T \\ \boldsymbol{e}_4^T \end{pmatrix} = (-1)^9 \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_4^T \\ \boldsymbol{e}_6^T \\ \boldsymbol{e}_5^T \\ \boldsymbol{e}_7^T \end{pmatrix} = (-1)^{10} \det(I_7).$$

Aufgabe 8.2

Gegeben sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \boldsymbol{b} \notin \text{span}\{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n\}.$$

Dann existiert keine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Wenn $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^\top$ Lösung des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, dann ist $x_1\boldsymbol{a}^{(1)} + ... + x_n\boldsymbol{a}^{(n)} = \boldsymbol{b}$. Um $\boldsymbol{b}$ als solche Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}^{(1)}, ..., \boldsymbol{a}^{(n)}$ darzustellen, muss aber $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ gelten.

Aufgabe 8.3

8.3a) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathbb{P}_n(x) := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad $\leq n$. Es gilt:

√ (i) Die Dimension des Unterraums $\mathbb{P}_n$ ist $n+1$.

Die Dimension ist höchstens $n+1$, denn die Polynome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugen offensichtlich diesen Unterraum. Diese $n+1$ Polynome sind aber auch linear unabhängig, wie wir gleich zeigen, und damit ist die Dimension auch mindestens $n+1$; zusammen ergibt dies $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$. Nach Definition von linear unabhängig, ist zu zeigen: $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \;\forall x$ impliziert $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Für $x \to \infty$ konvergiert $(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)/x^n$ gegen a_n und nach Voraussetzung auch gegen Null; also $a_n = 0$. Induktiv folgt, dass alle Koeffizienten verschwinden.

√ (ii) Die Sinusfunktion ist Element von $\mathcal{F}$ ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume $\mathbb{P}_n$ ($\sin \notin \mathbb{P}_n$).

Richtig. $\sin \in \mathcal{F}$ ist klar, denn Sinus ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Allerdings ist Sinus nicht als Polynom schreibbar (kein Polynom hat unendlich viele Nullstellen ausser dem Nullpolynom), also $\sin \notin \mathbb{P}_n \;\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

Falsch, denn aus $\lambda \sin + \mu \cos \equiv 0$ folgt durch auswerten bei Null $\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu = 0$ und durch auswerten bei $\pi/2$ genauso $\lambda = 0$. Damit haben wir aber gerade gezeigt, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind.

√ (iv) $1, \sin^2, \cos^2$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

Genau, denn $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$ bedeutet, dass sich 1 als Linearkombination von $\sin^2$ und $\cos^2$ schreiben lässt.

√ (v) Sind zwei Polynome $p(x), q(x)$ linear unabhängig, so auch die Polynome $xp(x), xq(x)$.

$\lambda\, xp(x) + \mu\, xq(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ impliziert (man dividiere durch x) $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0 \;\forall x \neq 0$. Also hat das Polynom $\lambda p + \mu q$ unendlich viele Nullstellen und muss damit das Nullpolynom sein: $\lambda p + \mu q \equiv 0$. Nach Voraussetzung hat diese Gleichung nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = 0$ und wir haben gezeigt: $xp(x), xq(x)$ sind linear unabhängig.

√ (vi) Der Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{\sin\}$ schneidet den Unterraum $\mathbb{P}_3$ nur in 0 (das heisst $V \cap \mathbb{P}_3 = \{0\}$) und es gilt $\dim(\operatorname{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$.

Ein Element von V ist von der Form $\lambda \sin$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie in (b) folgert man, dass sich diese Funktion nur für $\lambda = 0$ als Polynom schreiben lässt. Damit haben V und $\mathbb{P}_3$ nur den Nullvektor gemeinsam. Die zweite Aussage ist ebenfalls richtig, denn $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 x + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x^3 = 0 \;\; \forall x$ impliziert $\lambda_1 = 0$ (folgt aus dem ersten Teil der Aufgabe) und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ folgt dann wie in (a). Damit haben wir 5 linear unabhängige Vektoren die also einen 5-dimensionalen Raum aufspannen.

Aufgabe 8.4

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Lösung: Betrachte die k Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ im Vektorraum V.

$\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1\mathbf{a}^{(1)} + \dots + x_k\mathbf{a}^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \dots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.

Falls jeder Vektor $\mathbf{b}$ von V als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ **erzeugend**.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4) und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:
Schreibe $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^{(1)} \dots \mathbf{a}^{(k)})$. $\mathbf{A}$ ist eine $n \times k-$Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit der Gauss-Schema können wir $r = \mathrm{Rang}\ \mathbf{A}$ finden.

Es gilt: die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ also } n = 3,\ k = 2,\ r = 1.$$

Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-3) \\ (2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-\frac{2}{3}) \\ (\frac{1}{3}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also gilt $n = 4,\ k = r = 3$. Da $r = k$ sind die Vektoren linear unabhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-\frac{2}{3}) \\ (-\frac{1}{3}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 14/3 & 5/3 \\ 0 & 16/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-\frac{7}{8}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 14/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -18/7 \end{pmatrix}$$

also $n = k = r = 3$, und damit sind die Vektoren linear unabhängig und erzeugend.

d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (1) \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

also $r = n = 3$, $k = 4$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = n$ sind sie erzeugend.

Veröffentlichung am 8. November 2016.

Abzugeben bis 16. November 2016.