R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 9

Aufgabe 9.1

Finden Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Lösung: Wir schreiben das System als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum finden wir mit Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 0 \\ (-2) \\ (+1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (+4) \\ (-3) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (+\frac{5}{11}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{42}{11} & -\frac{18}{11} \end{pmatrix}$$

Wähle $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{42}{11}x_4 - \frac{18}{11}x_5 = 0$ folgt $x_4 = \frac{3}{7}\alpha$. Weiter folgt:

$$11x_3 - 7x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{7}\alpha$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{7}\alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{5}{7}\alpha, -\frac{4}{7}\alpha, 0, \frac{3}{7}\alpha, \alpha \right)^\top \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis des Lösungsraums ist also

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

bzw. ein nichttriviales Vielfaches davon.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\oplus$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir müssen überprüfen, ob die Rechenregeln (VA1)-(VA4) und (VM1)-(VM3) der Vorlesung für die vorgegebenen Operationen gelten. Für $x, y \in V = \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \text{ aber } \quad \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 + x_2 \\ y_2 - x_1 \\ y_3 + x_3 \end{pmatrix},$$

also gilt im Allgemeinen <u>nicht</u> $x \oplus y = y \oplus x$ und $V = (\mathbb{R}^3, \oplus, \cdot)$ ist deshalb sicher kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 9.3

9.3a) Sei V die folgende Menge von Vektoren: $\{(x, y, 3x - y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

9.3b) Ist die Menge $W = \{(x, 3x - 1, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: V und W sind offensichtlich nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$.

a) Wir zeigen: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

- (Regel U1) Seien $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 3x_1 - y_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3x_2 - y_2 \end{pmatrix} \in V$. Es gilt:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 3x_3 - y_3 \end{pmatrix} \in V, \text{ wobei } x_3 = x_1+x_2,\ y_3 = y_1+y_2.$$

- (Regel U2) Sei $\boldsymbol{a}$ wie oben, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ 3\alpha x_1 - \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 3x_4 - y_4 \end{pmatrix} \in V, \text{ wobei } x_4 = \alpha x_1,\ y_4 = \alpha y_1.$$

Also ist V ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Betrachte nun $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x-1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

Seien $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 - 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_2 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$. Dann gilt:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3(x_1 + x_2) - 2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \notin W.$$

W ist also <u>kein</u> Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Alternativ lässt sich argumentieren, dass W den Nullvektor nicht enthält, aber jeder Untervektorraum muss den Nullvektor enthalten (da dieser wiederum ein Vektorraum ist).

Aufgabe 9.4 Gram-Schmidt Algorithmus

9.4a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ eine orthonormale Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Benützen Sie das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

9.4b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, d.h.

$$\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{b}_1 + x_2 \boldsymbol{b}_2 + x_3 \boldsymbol{b}_3.$$

Lösung: a) Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Es induziert die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^3$.

Berechnung von $\boldsymbol{b}_1$: $\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung von $\boldsymbol{b}_2$:

$$\langle \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{b}_1 \rangle\, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\|\boldsymbol{c}_2\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $\boldsymbol{b}_3$:

$$\langle \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{c}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{b}_1 \rangle\, \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{b}_2 \rangle\, \boldsymbol{b}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{c}_3}{\|\boldsymbol{c}_3\|_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

b) Man kann natürlich die Matrix $\mathrm{B} = (\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3)$ definieren und $\mathrm{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{v}$ nach $\boldsymbol{x}$ mit Gauss lösen. Weil $\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3$ eine orthonormale Basis bildet, wissen wir aber aus der Vorlesung, dass sich $\mathbf{v}$ als

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 + \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_2 \rangle \boldsymbol{b}_2 + \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_3 \rangle \boldsymbol{b}_3$$

schreiben lässt. Es gilt also für die Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$x_2 = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

$$x_3 = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}.$$

Bemerkung: Das ist genau das Gleiche wie das Lösen von $\mathrm{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ durch $\boldsymbol{x} = \mathrm{B}^\top \boldsymbol{v}$ (die Spalten von B sind orthonormiert, also ist B orthogonal und es gilt $\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}^\top$).

Die Beziehung $x_i = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle$ für $i = 1, 2, 3$ lässt sich auch sehr leicht direkt aus dem Ansatz herleiten:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle &= \langle x_1 \boldsymbol{b}_1 + x_2 \boldsymbol{b}_2 + x_3 \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle \\ &= x_1 \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle + x_2 \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle + x_3 \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle \\ &= x_i, \end{aligned}$$

da $(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ eine orthonormale Basis ist.

Aufgabe 9.5

9.5a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (i) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Richtig. Denn die Definition von linear abhängig war gerade, dass eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren den Nullvektor ergibt. Die Koeffizienten λ_1,..., λ_n dieser Linearkombination lösen dann das obige Gleichungssystem.

√ (ii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Denn die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl Basisvektoren und damit auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Da $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, können höchstens n Vektoren linear unabhängig sein, und damit also $k \leq n$ (Satz 4.3).

(iii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Falsch. Ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise linear unabhängig, es kann mehr Vektoren als nötig haben, um den Vektorraum aufzuspannen. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier also n (Satz 4.3). Es kann aber durchaus auch $k > n$ sein.

√ (iv) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Eine Basis ist ein linear unahängiges Erzeugendensystem, in anderen Worten ein minimales Erzeugendensystem. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier n. Somit muss sogar gelten $k = n$ (Satz 4.3), insbesondere also $k \leq n$.

√ (v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

Richtig. Denn ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise ein minimales Erzeugendensystem (= Basis).

(vi) Falls die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

Falsch. Für $k < n$ können die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$ linear unabhängig sein, ohne eine Basis für $\mathbb{R}^n$ zu sein.

9.5b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

$\checkmark$ (i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\checkmark$ (ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Lösung: Für ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ brauchen wir nach Satz 4.3 mindestens 3 Vektoren. Genau dann wenn wir 3 linear unabhängige Vektoren auswählen können, bilden alle Vektoren zusammen ein Erzeugendensystem.
Dies lässt sich wie folgt einsehen:

(i) Die ersten drei Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig. Deshalb handelt es sich hier um ein Erzeugendensystem.

(ii) Durch Anwenden des Gaussverfahren

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \\ (-1)\end{matrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

sehen wir, dass die Matrix den Rang 3 hat. Deshalb handelt es sich auch hier um ein Erzeugendensystem.

(iii) Der dritte Vektor ist 2-mal der erste, somit sind die drei Vektoren linear abhängig und können somit kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sein.
Die lineare Abhängigkeit sieht man formal aus der Tatsache, dass

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 0.$$

9.5c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\checkmark$ (ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Lösung: Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Nach Satz 4.3 besteht eine Basis im $\mathbb{R}^3$ aus genau 3 Vektoren.

(i) Die Vektoren können keine Basis sein, da es vier Vektoren sind.

(ii) Die Vektoren bilden eine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) ein Erzeugendensystem sind und es genau drei Vektoren sind. Aus Satz 4.3 folgt damit, dass sie zusätzlich erzeugend und damit eine Basis sind.

(iii) Die Vektoren sind keine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) kein Erzeugendensystem sind.

Veröffentlichung am 15. November 2016.

Abzugeben bis 23. November 2016.