R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 10

Aufgabe 10.1

Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 = x_4\}.$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

10.1a) U,

Lösung: $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$. Man kann also x_1, x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Damit ist $x_2 = 2x_3 - x_4$. Man kann U also schreiben als

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{a}_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{a}_2} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{a}_3}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ sind offensichtlich ein Erzeugendensystem für U.

10.1b) V,

Lösung: $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 = x_4\}$. Man kann also x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Aus $x_1 = x_4$ folgt: $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$. Also gilt:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie in 10.1a) sieht man, dass $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ ein Erzeugendensystem von V bildet mit

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10.1c) $U \cap V$.

Lösung: $U \cap V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}_{(i)}, \underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0}_{(ii)}, \underbrace{x_1 = x_4}_{(iii)} \right\}$. Es folgt:

$$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 \overset{(ii)}{=} 2x_3 \Rightarrow x_4 \overset{(i)}{=} 2x_3 - x_2 = 2x_3 - 2x_3 = 0 \overset{(iii)}{\Rightarrow} x_1 = 0.$$

x_3 kann als freier Parameter gewählt werden. Damit folgt:

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow c^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Erzeugendensystem von $U \cap V$.

Aufgabe 10.2

10.2a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können also z.B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aber auch $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nehmen, sowie $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

10.2b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Lösung: Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ *ist gleich* $r = \operatorname{Rang} \mathbf{A}$.
Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.
Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \operatorname{Rang} \mathbf{A}$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}$$

<u>Fall $a = b = 0$</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ 1 & 2 & 3-c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

<u>Fall $a = 0, b \neq 0$</u>:

- für <u>$c = 0$</u> gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ also } d = r = 2,$$

- für <u>$c \neq 0$</u> gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & b & -c \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \frac{-(1+a)}{a} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\frac{-b}{2}) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+c)b}{2a} \end{pmatrix}$$

- Falls $-\frac{(3a+c)b}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = -3a$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{(3a+c)b}{2a} \neq 0 : d = r = 3$.

Aufgabe 10.3

Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5 \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V. Benutzen Sie, dass $\{t^3, t^2, t, 1\}$ eine Basis von $\mathbb{P}^3$ ist, und verwenden Sie diese für die Berechnungen.

Lösung: Die entsprechende Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-2) \\ (1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt $\dim(V) = \text{rang}(A) = 2$ und eine mögliche Basis ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der reduzierten Matrix entspricht:

$$\mathcal{B} = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^2 + t - 3\}.$$

Aufgabe 10.4 Affiner Unterraum

Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ von Vektoren

$$U := \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

10.4a) Untersuchen Sie, ob U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: Wir möchten herausfinden, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Wir überprüfen dies mit dem Gauss Algorythmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-3/2) \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass der Rang 3 ist. Also sind die Vektoren linear unabhängig, vgl. Satz IV.4(ii) (Seite 31 in den Notizen zu Kapitel 4). Das heisst, für all $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist auch $\mathbf{0} \notin U$. Aber auf Seite Seite 10 der Notizen zu Kapitel 4 wird dies als eine Konsequenz der Definition eines Unterraums gezeigt. Wir schliessen also, dass U kein Unterraum ist.

10.4b) Wir definieren die folgende Addition $\oplus$ auf U:

$$\boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2 := \left(\boldsymbol{u}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\boldsymbol{u}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$. Eine skalare Multiplikation $\odot$ ist definiert durch

$$\lambda \odot \boldsymbol{u} := \lambda \left(\boldsymbol{u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\boldsymbol{u} \in U$. Untersuchen Sie, ob $(U, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist, wobei der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Nullvektor definiert ist.

Lösung: Wir überprüfen die Definition eines Vektorraums aus den Notizen. Sei

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiges Element aus U hat die Form

$$\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

für bestimmte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ein Element is also durch die Wahl von λ_1, λ_2 bestimmt. Wir beobachten, dass

$$\begin{aligned}(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \\ &= (\lambda_1 + \widehat{\lambda}_1)\boldsymbol{a} + (\lambda_2 + \widehat{\lambda}_2)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \in U.\end{aligned}$$

Also ist U abgeschlossen mit dieser Addition $\oplus$ (Eigenschaft (VA)). Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \alpha\lambda_1 \boldsymbol{a} + \alpha\lambda_2 \boldsymbol{b} + c \in U.$$

Also ist U abgeschlossen mit dieser skalaren Multiplikation $\odot$ (Eigenschaft (VM)). Da

$$\begin{aligned}(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \\ &= (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \\ &= (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}),\end{aligned}$$

gilt (VA1) (Kommutativgesetz). Die Eigenschaft (VA2) (Assoziativgesetz) gilt durch eine ähnlich Rechnung. Nach Definition ist $\boldsymbol{c}$ der Nullvektor (VA3). Man sieht

$$(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus \boldsymbol{c} = (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Die Eigenschaft (VA4) gilt mit

$$(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (-)(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}) + (-\lambda_1 \boldsymbol{a} - \lambda_2 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha \odot (\beta \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) = \alpha \odot ((\beta(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}) = \alpha\beta(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\alpha\beta) \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}),$$

was (VM1) zeigt. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot (\beta(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}) &= (\alpha + \beta)(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \\ &= [\alpha \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] \oplus [\beta \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha \odot [(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] &= \alpha \odot [(\lambda_1 + \widehat{\lambda}_1)\boldsymbol{a} + (\lambda_2 + \widehat{\lambda}_2)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] \\ &= (\alpha\lambda_1 + \alpha\widehat{\lambda}_1)\boldsymbol{a} + (\alpha\lambda_2 + \alpha\widehat{\lambda}_2)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ &= (\alpha\lambda_1 \boldsymbol{a} + \alpha\lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus (\alpha\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \alpha\widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \\ &= \alpha \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \oplus \alpha \odot (\widehat{\lambda}_1 \boldsymbol{a} + \widehat{\lambda}_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}),\end{aligned}$$

was Eigenschaft (VM2) zeigt. Die Eigenschaft (VM3) gilt sofort, da

$$1 \odot (\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Also ist $(U, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum mit Nullvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man nennt U einen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Man kann auch allgemein fuer einen Vektorraum $(V, +, \cdot)$ stets affine Unterräume definieren: für $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{c}\} \subset V$ man definiert

$$U := \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{c} | \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

mit Addition $\oplus$ und skalarer Multiplikation $\odot$ definiert durch

$$\boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2 := (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \quad \text{und} \quad \alpha \odot \boldsymbol{u}_1 := \alpha \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$. Der Nullvektor ist $\boldsymbol{c}$.

Aufgabe 10.5

Im Vektorraum $\mathbb{P}_n = \operatorname{span}(1, x, x^2, \cdots, x^n)$ der Polynome definiert

$$(P, Q) := \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x, \quad P, Q \in \mathbb{P}_n$$

ein Skalarprodukt.

10.5a) Bestimmen sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.

Lösung: Alle Polynome zweiten Grades haben die $p(x) = ax^2 + bx + c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die Orthogalität, das heisst $(p, P_0) = (p, P_1) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = (p, P_0) &= \int_0^1 (ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c \\ 0 = (p, P_1) &= \int_0^1 x(ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c \end{aligned}$$

Wir verwenden den Gauss Algorythmus, um das LGS

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ (-3/4) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/24 & -1/4 & 0 \end{array} \right)$$

Das heisst, $c = -b/6$ und $a = 3(-b/2 - c) = 3(-b/3) = -b$. Wir setzen $b = 1$ und erhalten $p(x) = -x^2 + x - 1/6$ als uneindeutige Lösung.

10.5b) Bestimmen Sie den Winkel ϕ zwischen $P_i(x) = x^i$ und $P_j(x) = x^j$ für beliebige $i, j \leqslant n$.

Lösung: Wir errinnern an die Formel aus der Vorlesung

$$\cos\phi = \frac{(p,q)}{\|p\|\|q\|},$$

wobei $\|p\| = \sqrt{(p,p)}$ und berechnen

$$\begin{aligned}(x^i, x^j) &= \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{i+j+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x^i\| &= (\int_0^1 x^{i+i}\mathrm{d}x)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2i+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x^j\| &= (\int_0^1 x^{j+j}\mathrm{d}x)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2j+1}}.\end{aligned}$$

Dies ergibt dann

$$\phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)}}{i+j+1}\right).$$

Veröffentlichung am 22. November 2016.

Abzugeben bis 30. November 2016.