R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 11

Aufgabe 11.1

11.1a) Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$ steht der Residuenvektor $\boldsymbol{r}$ senkrecht auf dem Bildraum von A.

$\surd$ (i) Wahr.

(ii) Falsch.

Löst $\boldsymbol{x}$ die Normalgleichungen $A^\top A\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$, so folgt $A^\top \boldsymbol{r} = A^\top(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = 0$, d.h. $\boldsymbol{r}$ steht senkrecht auf den Spalten von A und somit senkrecht auf dem ganzen Bildraum von A.

11.1b) Wahr oder falsch: Falls der Messvektor $\boldsymbol{b}$ einer linearen Ausgleichsaufgabe $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor $\boldsymbol{r}$ gleich dem Nullvektor.

$\surd$ (i) Wahr.

(ii) Falsch.

Ja, denn $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} = 0$ (oder $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) ist lösbar genau dann, wenn $\boldsymbol{b}$ im Spaltenraum von A liegt. Das Gleichungssystem ist also im "klassischen" Sinne lösbar und die Ausgleichsrechnung überflüssig (dennoch besteht keine Gefahr die Methode der Ausgleichsrechnung zu benutzen, sie liefert dieselben ("klassischen") Lösungen), mit minimalem Residuenvektor $\boldsymbol{r} = 0$.

11.1c) Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000\frac{\text{U}}{\text{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

$$\begin{aligned}
&\text{1. Messung:} \quad X_1 = 1;\ Y_1 = 1\\
&\text{2. Messung:} \quad X_2 = 2;\ Y_2 = 2\\
&\text{3. Messung:} \quad X_3 = 4;\ Y_3 = 3.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = a_1 x + a_2$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$a_1 X_i + a_2 - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

(i) $a_1 = \frac{3}{11}; a_2 = \frac{1}{2}$.

(ii) $a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = \frac{3}{5}$.

(iii) $a_1 = \frac{3}{5}; a_2 = \frac{9}{14}$.

√ (iv) $a_1 = \frac{9}{14}; a_2 = \frac{1}{2}$.

Die Fehlergleichungen lauten

$$\begin{array}{rcrcrcl}
a_1 & + & a_2 & - & 1 & = & r_1\\
2a_1 & + & a_2 & - & 2 & = & r_2\\
4a_1 & + & a_2 & - & 3 & = & r_3,
\end{array}$$

also ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir müssen die Normalgleichungen $A^\top A \boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$ lösen. Mit $A^\top A = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $A^\top \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist dies $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$, und die Lösungen sind $a_1 = \frac{9}{14}, a_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 11.2 Ausgleichsrechnung

Gegeben sind die folgende 5 Punkte (x_i, y_i), $i = 1, ..., 5$, in der Ebene:

$$\begin{array}{c|rrrrr}
i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
\hline
x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\
\hline
y_i & -0.5 & -0.1 & 1 & 2.3 & 3.3
\end{array}\ . \qquad (11.2.1)$$

11.2a) Bestimmen Sie die für diese 5 Punkte bestpassendste

(i) Gerade $y = a_1 + a_2 x$

(ii) Parabel $y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$

(iii) $y = c_1 \cos(\pi x/4) + c_2 \sin(\pi x/4) + c_3$

im Sinne der kleinsten Quadrate.

Lösung: Wir lösen jeweils die Normalengleichung: $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$. Für (i),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für (ii),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 13.4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Für (iii),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.1 \\ 1 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\sqrt{2}/10 + 1 \\ 6\sqrt{2}/5 + 19/5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+\sqrt{2} & 11\sqrt{2}/10 + 1 \\ 0 & 3 & 0 & (6\sqrt{2}+19)/5 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; (-(1+\sqrt{2})/2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+\sqrt{2} & 11\sqrt{2}/10 + 1 \\ 0 & 3 & 0 & (6\sqrt{2}+19)/5 \\ 0 & 0 & 7/2 - \sqrt{2} & 22/5 - (21/20)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$c_3 = \frac{22/5 - (21/20)\sqrt{2}}{7/2 - \sqrt{2}} = \frac{88 - 21\sqrt{2}}{70 - 20\sqrt{2}},$$

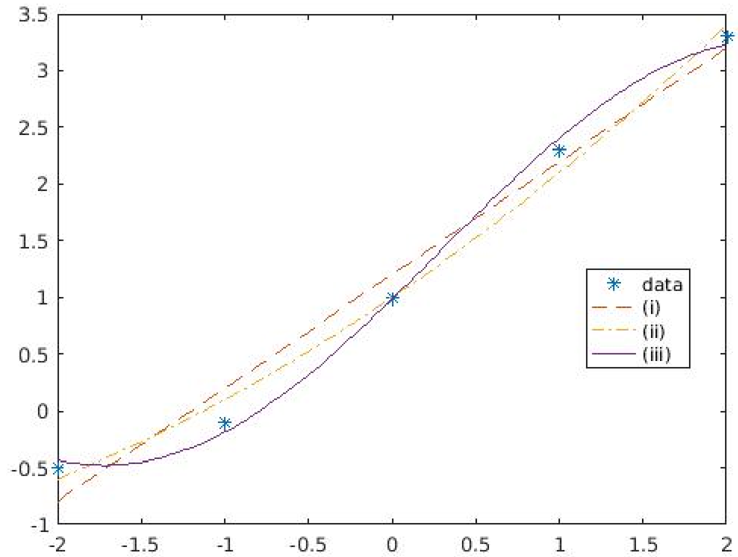
$$c_2 = \frac{6\sqrt{2} + 19}{15}$$

und

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{10}\sqrt{2} + 1 - (1+\sqrt{2})c_3\right) = \frac{-2 - \sqrt{2}}{14 - 4\sqrt{2}}.$$

Um einen Eindruck zu erhalten plotten wir die drei Approximationen mit MATLAB:
Wir benutzten folgenden Code:

```
x_data = [-2 -1 0 1 2 ];
y_data =[-0.5 -0.1 1 2.3 3.3 ];
pa = polyfit(x_data,y_data,1);
pb = polyfit(x_data,y_data,2);
```




```
A = [ 0 -1 1; sqrt(2)/2 -sqrt(2)/2 1; 1 0 1; sqrt(2)/2 sqrt(2)/2 1;
0 1 1];
pc = (A' *A)\(A' * y_data');
plot(x_data,y_data,'*',x,polyval(pa,x),'--',x,polyval(pb,x),'-.',x,
pc(1)*cos(pi/4*x) + pc(2)*sin(pi/4*x) + pc(3))
legend('data','(i)','(ii)','(iii)')
```

Aufgabe 11.3

Für die Grösse b wird ein Modell der Form $b = a_1X + a_2Y + a_3Z$ angenommen. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ nach der Methode der kleinsten Quadrate mit den Werten aus folgender Tabelle

X_i	Y_i	Z_i	b_i
-1	2	0	4
-1	0	2	2
2	-1	0	-2
2	0	-1	0
0	-1	2	-2
0	2	-1	4

.

Lösung: Gesucht wird die Lösung $\boldsymbol{x}$ der Normalengleichung $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -4 \\ -4 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 & -10 \\ -4 & 10 & -4 & 20 \\ -4 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & -2 & 10 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2/5) \\ (2/5) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21/5 & -14/5 & 8 \\ 0 & -14/5 & 21/5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21 & -14 & 40 \\ 0 & -14 & 21 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2/3) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 21 & -14 & 40 \\ 0 & 0 & 35/3 & 20/3 \end{pmatrix}$$

und durch Rückwärtseinsetzen schliesslich $a_1 = 1/7,\ a_2 = 16/7,\ a_3 = 4/7$.

Veröffentlichung am 29. November 2016.

Abzugeben bis 7. Dezember 2016.