R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 12

Aufgabe 12.1 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung

Oft findet man lineare Abbildung nicht beschrieben durch eine Matrix sondern durch andere Operationen. In diesem Beispiel betrachten wir für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,,$$

wobei $\times$ für das Vektorprodukt steht.

12.1a) Überprüfen Sie, dass es sich bei F um eine lineare Abbildung handelt.

Lösung: Zu überprüfen ist: Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + \alpha F(\mathbf{y}).$$

Konkret erhalten wir: Sei $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = F(\mathbf{z}) &\overset{\text{Def } F}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def } \times}{=} \begin{pmatrix} a_2 z_3 - a_3 z_2 \\ a_3 z_1 - a_1 z_3 \\ a_1 z_2 - a_2 z_1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def } \mathbf{z}}{=} \begin{pmatrix} a_2(x_3 + \alpha y_3) - a_3(x_2 + \alpha y_2) \\ a_3(x_1 + \alpha y_1) - a_1(x_3 + \alpha y_3) \\ a_1(x_2 + \alpha y_2) - a_2(x_1 + \alpha y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2 y_3 - a_3 y_2 \\ a_3 y_1 - a_1 y_3 \\ a_1 y_2 - a_2 y_1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def } \times}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{y} \\
&= F(\mathbf{x}) + \alpha F(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

12.1b) Was ist die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$?

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

Lösung: Man berechnet leicht:

$$F\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + a_3 \cdot \mathbf{e}_2 + (-a_2) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$F\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (-a_3) \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + a_1 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$F\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \mathbf{e}_1 + (-a_1) \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nebenbei sehen wir, dass diese Matrix schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$.

12.1c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F)$.

Tipp: Den Nullraum kann man F direkt "ansehen" oder auch einfach dadurch bestimmen, dass man den Kern der Darstellungsmatrix ausrechnet.

Lösung: Geometrische Überlegung:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ liefert uns $F(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ einen Vektor, welcher auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}$ senkrecht steht und Länge

$$\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{x}\| \sin\alpha$$

hat, wobei α den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ bezeichnet, welches der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht. Somit gilt, da $\mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{y}\| = 0$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \text{Kern}(F) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|F(\mathbf{x})\| = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sin\alpha = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi\} \\ &= \text{span}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\alpha = 0, \pi$ bedeutet, dass es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$.

Direkte Berechnung mit Darstellungsmatrix: Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um das LGS

$A\mathbf{x} = 0$ zu lösen. Falls $a_3 \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; (a_2/a_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_2 a_1/a_3 & 0 \end{pmatrix} \; (a_1/a_3) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_3 \neq 0 : x_3 = t \in \mathbb{R}, x_2 = \frac{a_2}{a_3} t, x_1 = \frac{a_1}{a_3} t$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \text{span}(\mathbf{a} \frac{1}{a_3}) = \text{span}(\mathbf{a})$$

Falls $a_3 = 0$, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

und damit, falls $a_1 \neq 0$, $x_3 = 0, x_1 = t \in \mathbb{R}, x_2 = \frac{a_2}{a_1} t$. Falls $a_1 = 0$, dann ist, da $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, sicherlich $a_2 \neq 0$, und somit erhalten wir $x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = t \in \mathbb{R}$.

Damit erhalten wir in jedem Fall Kern(A) = span$(\mathbf{a})$.

12.1d) Was ist $\text{Rang}(F)$?

Lösung: Aus 12.1c) wissen wir, dass dim(Kern(F)) $= 1$, und mithilfe der Dimensionsformel folgt

$$\text{Rang}(F) = \dim(\text{Bild}(F)) = 3 - \dim(\text{Kern}(F)) = 2.$$

12.1e) Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, F(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle , \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Lösung: Da $F(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$ aus den Eigenschaften des Vektorprodukts folgt, gilt $\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = 0$ (man kann dies auch explizit berechnen).

Aufgabe 12.2

12.2a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Orthonormalbasen für Kern A und Bild A.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Basis von Kern A und Bild A. Wenden Sie dann in einem zweiten Schritt das Gram–Schmidt Verfahren an. Bei der Anwendung des Gram–Schmidt Verfahrens für die Basis von Kern A kann ein einfacher Taschenrechner verwendet werden.

Lösung: Wir definieren die Spalten der Matrix $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$. Kern $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$, Bild $A = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \mid$ es existiert ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, so dass $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\}$.
Aus dem Buch auf Seiten 122-123 wissen wir, dass gilt:

- $\boldsymbol{b} \in$ Bild $A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ besitzt mindestens eine Lösung
- $\boldsymbol{x} \in$ Kern $A \Leftrightarrow \boldsymbol{x}$ löst $A\boldsymbol{x} = 0$
- dim(Bild A) + dim(Kern A) $= r + (n - r) = n$ $(\underline{\star})$, wobei $r =$ Rang A
- Bild $A =$ span$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ $(\underline{\diamondsuit})$

Löse also zunächst $A\boldsymbol{x} = 0$ mit Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wähle $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_3 = \beta \in \mathbb{R}$

$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta)$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Kern } A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Kern } A) = 2$$

$\stackrel{(\star)}{\Rightarrow}$ dim(Bild A) $= 4-$dim(Kern A) $= 2 \stackrel{(\diamondsuit)}{\Rightarrow}$ wähle 2 linear unabhängige Spaltenvektoren von A. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man (analog wie in Aufgabe 3, Serie 6), dass dies gilt für z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Bild A=span$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir wenden das Gram–Schmidt Verfahren an, um eine Orthonormalbasis zu bekommen. Wir beginnen mit Kern A. Wir erhalten, dass der Vektor $\boldsymbol{a}_1' = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Norm $\|\boldsymbol{a}_1'\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle} =$

$\sqrt{9+36+4} = \sqrt{61}$ hat. Daher ist

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1'}{\|\boldsymbol{a}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix}-3\\6\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Wir führen einen Schritt des Gram–Schmidt Verfahrens durch:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_2' &= \begin{pmatrix}1\\-6\\4\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\-6\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\\0\\4\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{61}\begin{pmatrix}-3\\6\\0\\4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\-6\\4\\0\end{pmatrix} - \frac{-39}{61}\begin{pmatrix}-3\\6\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-56/61\\-132/61\\4\\156/61\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Man berechnet mit einem Taschenrechner, dass $\|\boldsymbol{a}_2'\| = 4\sqrt{61\cdot 107}/61$. Daher

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{61\cdot 107}}\begin{pmatrix}-14\\-33\\61\\39\end{pmatrix}.$$

Für die Basis von Bild A verfahren wir auch mit Gram–Schmidt: Es gilt, dass der Vektor $\boldsymbol{b}_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ die norm $\|\boldsymbol{b}_1'\| = \sqrt{2}$ hat. Daher

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Weiter

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_2' &= \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da $\|\boldsymbol{b}_2'\| = 4$, gilt

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Alternativ: Für die Bestimmung einer Orthonormalbasis von Bild A war unsere Wahl von linear unabhängigen Spalten der Matrix A systematisch (die Pivotspalten). Alternativ hätte man die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$ wählen können. Da diese bereits orthogonal zueinander sind, hätte dies die Rechnung abgekürzt.

12.2b) Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ in sich.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \stackrel{F}{\longmapsto} \quad \boldsymbol{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

1. Durch welche Matrix A wird F (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) beschrieben?
2. Untersuchen Sie, wie sich Abbildung F auf die Norm eines Vektors auswirkt, d.h. vergleichen Sie $\|F(\boldsymbol{x})\|$ und $\|\boldsymbol{x}\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

1. Wir bestimmen die Matrix wie auf Seiten 120–121 im Buch beschrieben. Wir bestimmen die Bilder der Standardbasis $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1) =& F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{a}_1 \\ F(\boldsymbol{e}_2) =& F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

   Da diese den Koordinaten bezüglich der Standardbasis entsprechen, wird F durch die Matrix

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   beschrieben.

2. Wir berechnen, dass

$$\begin{aligned} \|F(\boldsymbol{x})\|_2^2 =& \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1)\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2) \\ =& x_1^2 + x_2^2 = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

   Damit gilt $\|F(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$, was bedeutet, dass F längentreu ist.

Aufgabe 12.3 Multiple Choice: Linearität von Abbildungen

Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht, und geben Sie eine Begründung an.

12.3a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

$\surd$ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen zwei reellen Vektorräumen V und W heisst linear, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $F(x + y) = F(x) + F(y)$,
- $F(\alpha x) = \alpha F(x)$.

Für eine Abbildung der Form
$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{v} \mapsto AF\mathbf{v},$$
wobei **A** eine $m \times n$-Matrix ist, sind diese Eigenschaften erfüllt. Diese erste Abbildung und die dritte, vierte und fünfte Abbildung sind von dieser Form für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (0),\ (1).$$

Daher sind diese Abbildungen linear.

12.3b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(i) F ist linear

√ (ii) F ist nicht linear

Jede lineare Abbildung muss Null auf Null abbilden, das heisst, $F(0) = 0$ für jede lineare Abbildung $F\colon V \to W$ (V, W seien Vektorräume). Dies folgt direkt aus der Linearität (siehe Erklärung zur ersten Abbildung). Sie bedingt nämlich unter anderem, dass $F(0) = F(0+0) = F(0)+F(0)$ und, nach Subtraktion von $F(0)$, also $F(0) = 0$. Für die vorliegende Abbildung (und die sechste und achte Abbildung) ist dies nicht erfüllt. Wir rechnen nach: $F(0) = (0, 0, 1)^\top \neq 0 = (0, 0, 0)^\top$; die Abbildung ist also nicht linear.

12.3c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

√ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

12.3d) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

√ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

12.3e) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, F die Identität

√ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

12.3f) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(i) F ist linear

√ (ii) F ist nicht linear

Falsch: $F(0) = 1 \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

12.3g) $F : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$ (Hier bezeichnet $C^2(\mathbb{R})$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

√ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Die Linearität folgt aus den Ableitungsregeln: Es gilt $(g + h)'' = g'' + h''$ und $(\alpha h)'' = \alpha h''$ für alle $g,\ h \in C^2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

12.3h) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, F beschreibt die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(i) F ist linear

√ (ii) F ist nicht linear

Falsch: $F(0) = (-1, 1)^\top \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

12.3i) $F : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen $\sin$ und $\cos$ ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht. (Hier bezeichnet $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

√ (i) F ist linear

(ii) F ist nicht linear

Das Bild von $(x,y)^\top$ unter dieser Abbildung ist gleich $\alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$, wobei (α, β) die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha \sin(-1) + \beta \cos(-1) &= x \\ \alpha \sin(1) + \beta \cos(1) &= y \end{aligned}$$

ist. Dieses hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1}, \; \beta = \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1}.$$

Somit ist F durch

$$(x,y)^\top \longmapsto \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} F\big((x,y)^\top + (x',y')^\top\big) &= F\big((x+x', y+y')^\top\big) \\ &= \frac{(y+y')-(x+x')}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{(x+x')+(y+y')}{2 \cdot \cos 1} \cos \\ &= \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos + \frac{y'-x'}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x'+y'}{2 \cdot \cos 1} \cos \\ &= F\big((x,y)^\top\big) + F\big((x',y')^\top\big) \end{aligned}$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F\big(\alpha(x,y)^\top\big) &= F\big((\alpha x, \alpha y)^\top\big) \\ &= \frac{\alpha y - \alpha x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{\alpha x + \alpha y}{2 \cdot \cos 1} \cos = \alpha\Big(\frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos\Big) \\ &= \alpha F\big((x,y)^\top\big). \end{aligned}$$

Somit ist F linear.

Aufgabe 12.4 Abbildungsmatrix einer Polynomabbildung

Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_3 & \to & \mathbb{P}_3 \\ p(t) & \mapsto & p''(t) + tp'(t) \end{array}$$

12.4a) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

Lösung: Wir rechnen für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_3$ die Linearität von F direkt nach:

(L1):
$$\begin{aligned} F(p(t)+q(t)) &= (p(t)+q(t))'' + t(p(t)+q(t))' \\ &= p''(t) + q''(t) + tp'(t) + tq'(t) \\ &= (p''(t) + tp'(t)) + (q''(t) + tq'(t)) \\ &= F(p(t)) + F(q(t)) \end{aligned}$$

und

(L2): $F(\alpha p(t)) = (\alpha p(t))'' + t(\alpha p(t)) = \alpha p(t)'' + \alpha t p(t) = \alpha(p(t)'' + tp(t)) = \alpha F(p(t)).$

12.4b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von F bezüglich der Monombasis $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$ von $\mathbb{P}_3$.

Lösung: Die Koordinaten der Bilder der Basis bilden die Spalten der Abbildungsmatrix.

$$\begin{aligned} F(1) &= 0, \\ F(t) &= t, \\ F(t^2) &= 2 + t \cdot 2t = 2 + 2t^2, \\ F(t^3) &= 6t + t \cdot 3t^2 = 6t + 3t^3. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12.4c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 = \{1 + t^3, t - t^2, t^2 + t^3, t^3\} \subseteq \mathbb{P}_3$.

Lösung: Wir könnten hier analog zur vorherigen Teilaufgabe vorgehen, wollen aber eine Lösung via Basiswechsel präsentieren. Wie wir wissen, gilt

$$\widetilde{A} = T^{-1} A T.$$

Dabei bezeichnet T die Matrix zum Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_2$ in die Basis $\mathcal{B}_1$. Wir benennen die Basisvektoren der Basis $\mathcal{B}_1$ mit $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ und die Basisvektoren der $\mathcal{B}_2$ mit $\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \boldsymbol{b}'_3, \boldsymbol{b}'_4$. Um die Abbildungsmatrix des Basiswechsels von der Basis $\mathcal{B}_2$ in die Basis $\mathcal{B}_1$ zu erhalten, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren unter der Identitätsabbildung $\mathcal{I}$. Wir erhalten das

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\boldsymbol{b}'_1) &= \boldsymbol{b}'_1 &&= \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_4 \\ \mathcal{I}(\boldsymbol{b}'_2) &= \boldsymbol{b}'_2 &&= \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 \\ \mathcal{I}(\boldsymbol{b}'_3) &= \boldsymbol{b}'_3 &&= \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 \\ \mathcal{I}(\boldsymbol{b}'_4) &= \boldsymbol{b}'_4 &&= \boldsymbol{b}_4. \end{aligned}$$

Allgemein gilt, dass für $j = 1, \dots, 4$

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{b}'_j) = T_{1j}\boldsymbol{b}_1 + T_{2j}\boldsymbol{b}_2 + T_{3j}\boldsymbol{b}_3 + T_{4j}\boldsymbol{b}_4.$$

Daher lesen wir ab, dass

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Abbildungsmatrix T^{-1} gehen wir genauso vor:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{b}_1) &= \boldsymbol{b}_1 &&= \boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_4 \\ \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{b}_2) &= \boldsymbol{b}_2 &&= \boldsymbol{b}'_2 + \boldsymbol{b}'_3 - \boldsymbol{b}'_4 \\ \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{b}_3) &= \boldsymbol{b}_3 &&= \boldsymbol{b}'_3 - \boldsymbol{b}'_4 \\ \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{b}_4) &= \boldsymbol{b}_4 &&= \boldsymbol{b}'_4. \end{aligned}$$

Allgemein gilt, dass für $j = 1, \dots, 4$

$$\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{b}_j) = T^{-1}_{1j}\boldsymbol{b}'_1 + T^{-1}_{2j}\boldsymbol{b}'_2 + T^{-1}_{3j}\boldsymbol{b}'_3 + T^{-1}_{4j}\boldsymbol{b}'_4.$$

Daher ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Test überprüft man leicht, dass $TT^{-1} = I_4$. Also ist T^{-1} die Inversematrix von T. Eine kurze Rechnung liefert nun

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & -1 & 8 & 6 \\ -3 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veröffentlichung am 6. Dezember 2016.

Abzugeben bis 14. Dezember 2016.