R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 13

Aufgabe 13.1 Beispiel einer Koordinatentransformation

Gegeben seien zwei die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

13.1a) Finden Sie die Koordinatentransformationsmatrix $\mathbf{S}$, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Lösung: Die Spalten der Abbildungsmatrix $\mathbf{S}$ sind die Koordinaten der Vektoren der Basis $\mathcal{A}$ jeweils ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$. Wir schreiben zuerst die Vektoren in $\mathcal{A}$ als Linearkombinationen der Vektoren in $\mathcal{B}$. Um dies zu tun, müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen, was wir hier der Kürze Willen auslassen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2.6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 8.6 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 2.4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 6.4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Das heisst zum Beispiel, dass der erste Basisvektor der Basis $\mathcal{A}$ hat in der $\mathcal{B}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Damit ist die Matrix $\mathbf{S}$ gegeben als

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2.6 & 2.4 \\ 6 & 8.6 & 6.4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

13.1b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung: Die Koordinaten für $\mathbf{v}$ in der Basis $\mathcal{B}$ sind durch Multiplikation von $\mathbf{S}$ mit den Koordinaten für $\mathbf{v}$ in der Basis $\mathcal{A}$ gegeben. Wir erhalten

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2.6 & 2.4 \\ 6 & 8.6 & 6.4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.2 \\ 38.2 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Anders gesagt

$$\mathbf{v} = 6.2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 38.2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 18\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.2 Matrixpotenzen und Eigenwerte

Diese Aufgabe ist eine Vorbereitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren und zeigt gleichzeitig eine mögliche Anwendung auf. Wir suchen eine einfache Methode um $A^{100}\boldsymbol{x}$ zu berechnen für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.2a) Wenn $\boldsymbol{x}$ ein Vektor ist mit der Eigenschaft $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, was ist dann $A^k\boldsymbol{x}$ für $k = 1, 2, \ldots$?

Wir suchen daher Paare $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
k = 1: \quad & A\boldsymbol{x} && = \lambda\boldsymbol{x} \\
k = 2: \quad & A^2\boldsymbol{x} && = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} \\
k = 3: \quad & A^3\boldsymbol{x} && = A(\lambda^2\boldsymbol{x}) = \lambda^3\boldsymbol{x} \\
& \vdots && \\
& A^k\boldsymbol{x} && = \lambda^k\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

13.2b) Demonstrieren Sie, dass die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ für ein gegebenes λ ein homogenes, lineares Gleichungssystem darstellt. Wie sieht die zugehörige Koeffizientenmatrix aus?

Lösung: Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & \lambda x_2 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rcrcl} (3-\lambda)x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (3-\lambda)x_2 & = & 0 \end{array}$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem (die rechte Seite ist null). Übrigens ist für den allgemeinen Fall $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ das entsprechende lineare Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} = 0,$$

welches auch ein homogenes Gleichungssystem ist.

13.2c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante Werte von λ, für die $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ Lösungen $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hat.

Lösung: Wir wissen, dass ein lineares Gleichungssystem genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn die Deteminante $\det A$ ungleich null ist. Da $\boldsymbol{x} = 0$ immer eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = 0$ ist, wäre es in diesem Fall die einzige Lösung.

Wenn nun $\det A = 0$ gilt, so gibt es entweder unendlich viele Lösungen, oder gar keine. Da die rechte Seite in unserem Fall gleich null ist, muss die Verträglichkeitsbedingung immer erfüllt sein. Wir wissen dann also, dass es Lösungen von $A\boldsymbol{x} = 0$ gibt, für die $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist.

Also berechnen wir

$$\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhält man, dass $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ für $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ Lösungen $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hat.

Aufgabe 13.3 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

13.3a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}7 & -6 & 5\\ 5 & -6 & 7\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Lösung: Allgemein ergeben sich die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{M}$ als Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{M} - \lambda I_n) = 0$ und die zugehörigen Eigenräume aus den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $(\mathbf{M} - \lambda_i I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Für die Matrix A ergibt sich

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ 6 & -\lambda-1\end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, beide mit algebraischer Vielfachheit 1.

Nun berechnen wir den Eigenvektor zu λ_1, indem wir die Lösungsmenge von $(A - \lambda_1)\boldsymbol{v}_1 = 0$ berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 6 & -2 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ (-2)\end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Den Eigenvektor zu λ_2 berechnen wir auf die gleiche Art, indem wir die Lösungsmenge von $(A - \lambda_2)\boldsymbol{v}_2 = 0$ bestimmen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ (-3)\end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Also haben λ_1 und λ_2 jeweils geometrische Vielfachheit 1.

Für B ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det\left(B-\lambda I_3\right) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 & 5 \\ 5 & -6-\lambda & 7 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (7-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 7 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -6-\lambda & 7 \end{vmatrix} \\
&= (7-\lambda)((\lambda+6)(\lambda-3)+14) - 30(\lambda-3) - 92 + 5(\lambda+6) \\
&= -\lambda^2(\lambda-4) \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Daher hat B die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

Nun berechnen wir den Eigenvektor zu λ_1, indem wir $(A-\lambda_1)\boldsymbol{v}_1 = 0$ lösen:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-3) \\ (-5) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-3/2) \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; t \in \mathbb{R}.
$$

Also hat der Eigenwert λ_1 die geometrische Vielfachheit 1.

Wir berechnen die Eigenvektoren zu λ_2, indem wir die Lösungsmenge von $(A-\lambda_2)\boldsymbol{v}_2 = 0$ berechnen:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \\ 7 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-5) \\ (-7) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (+2) \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.
$$

Also hat der Eigenwert λ_2 die geometrische Vielfachheit 1.

13.3b) * Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B mithilfe von MATLAB. Verwenden Sie dazu den MATLAB-Befehl `eig`. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren eigenen Resultaten aus 13.3a). Kommentieren Sie.

Tipp: Computer rechnen mit endlicher Genauigkeit.

Lösung: Berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren in MATLAB, erhalten wir

Listing 13.1: Berechnung der EW und EV in MATLAB

```
>> B = [ 7 -6 5;5 -6 7; 1 -2 3];
>> [V,D]=eig(B)
V =
```

```

  -0.894427190999916   0.408248285966068  -0.408248294961657
  -0.447213595499958   0.816496578678829  -0.816496583176623
  -0.000000000000000   0.408248299459452  -0.408248281468274

D =

   4.000000000000002                   0                   0
                   0   0.000000066103810                   0
                   0                   0  -0.000000066103809
```

Wir erhalten also drei verschiedene Eigenwerte und dazu jeweils drei verschiedene Eigenvektoren?! In 13.3a) haben wir aber gezeigt, dass die Matrix B nur zwei Eigenwerte $0, 4$ und zwei Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ besitzt!

Betrachten wir das Resultat aus MATLAB genauer, erkennen wir, dass wir bis auf Rundungsfehler der Grössenordnung 10^{-8} dieselben Eigenwerte erhalten, gespeichert in der Diagonalen der Matrix $\mathbf{D}$. Aus dem Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 werden durch Rundungsfehler zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_{2,3} := \pm 6.61 \cdot 10^{-8}$. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 6.61 \cdot 10^{-8}$ erhalten wir die Eigenvektoren

$$t\mathbf{V}(:,2) \approx t(0.4, 0.8, 0.4) = t\boldsymbol{v}_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

und zum negativen Eigenwert $\lambda_2 = -6.61 \cdot 10^{-8}$ erhalten wir

$$t\mathbf{V}(:,3) \approx -t(0.4, 0.8, 0.4) = t\boldsymbol{v}_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Somit stimmen die Eigenvektoren von $\lambda_{1,2}$ bis auf Rundungsfehler überein. Das Resultat von MATLAB stimmt somit bis auf Rundungsfehler mit unserem Ergebnis in 13.3a) überein.

Aufgabe 13.4

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.4a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

Lösung: Wir erhalten für das charakteristische Polynom

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Daher hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Dazugehörige Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für die Berechnung der Eigenvektoren müssen Lösungen, welche nicht 0 sind, der LGS $(A - \lambda_i)\boldsymbol{x} = 0$ gefunden werden für $i = 1, 2, 3$.

13.4b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

Lösung: Da A symmetrisch ist und die Eigenwerte verschieden sind, müssen die Eigenvektoren aus a) nur normiert werden, da sie bereits orthogonal sein müssen. Somit ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine orthonormale Eigenbasis zu A.

Tipp: Sie können verwenden, dass A symmetrisch ist.

13.4c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Lösung: Sei $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$A^4\boldsymbol{v} = A^3(A\boldsymbol{v}) = A^3(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A^3\boldsymbol{v} = \ldots \lambda^4\boldsymbol{v}.$$

A^4 hat also die Eigenwerte $\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2^4 = 81$ und $\lambda_3^4 = 1296$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind die gleichen wie für A, also $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen.

13.5a) Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A, dann ist $\boldsymbol{x}$ auch ein Eigenvektor von A^2.

√ (i) Richtig,

(ii) Falsch.

Lösung: Sei $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Dann gilt

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}, \tag{13.5.1}$$

und somit ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A^2 mit Eigenwert λ^2.

13.5b) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2.

(i) Richtig,

$\surd$ (ii) Falsch.

Lösung: Aufgrund von Gleichung (13.5.1) kann man sehen, dass die Eigenwerte von A^2 als λ^2 geschrieben werden können, wobei λ die Eigenwerte von A sind.

13.5c) Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, dann ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von $A + B$.

$\surd$ (i) Richtig,

(ii) Falsch.

Lösung: Sei $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A und B. Dann gibt es λ_A und λ_B sowie $A\boldsymbol{x} = \lambda_A\boldsymbol{x}$ und $B\boldsymbol{x} = \lambda_B\boldsymbol{x}$. Es gilt

$$(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = \lambda_A\boldsymbol{x} + \lambda_B\boldsymbol{x} = (\lambda_A + \lambda_B)\boldsymbol{x}.$$

13.5d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

(i) Richtig,

$\surd$ (ii) Falsch.

Lösung: Seien

$$A = B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A und B, aber die einzigen Eigenwerte von $A + B$ sind 2 und 6.

13.5e) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I_n$.

$\surd$ (i) Richtig,

(ii) Falsch.

Lösung: Sei $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A mit $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Dann gilt

$$(A + I_n)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + I_n\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + 1\boldsymbol{x} = (\lambda + 1)\boldsymbol{x}.$$

13.5f) Ist $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \neq 0$, dann hat $A = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}^\top$ den Eigenvektor $\boldsymbol{u}$.

(ii) Falsch.

√ (i) Richtig,

Lösung: Wir haben

$$A\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{u}.$$

Damit ist $\boldsymbol{u}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\|\boldsymbol{u}\|^2$.

Aufgabe 13.6 Orthogonale Projektion

Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

13.6a) Durch welche Matrix A wird F bezüglich der Standardbasis beschrieben?

Lösung: Betrachte die Standardbasis $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$. Der Vektor $\boldsymbol{e}_1$ steht senkrecht zu E. Die Abbildung F projiziert $\boldsymbol{e}_1$ also auf $0 \in E$:

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{a}_1.$$

Da $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ bereits in E liegen, folgt:

$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{a}_2,$$

$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{a}_3.$$

Es folgt

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.6b) Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

Lösung: Kern A ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$, besteht also aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 = x_3 = 0$. Somit ist

$$\text{Kern}\, A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

und es folgt $\dim(\text{Kern}\, A) = 1$.

13.6c) Bestimmen Sie Bild A und dim(Bild A).

Lösung: Es gilt $\mathrm{Bild}\,A = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3\}$. Da $\boldsymbol{a}_1 = 0$ ist und $\boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3$ offensichtlich linear unabhängig sind, folgt

$$\text{Bild}\,A = \text{span}\,\{\boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = E.$$

und $\dim(\mathrm{Bild}\,A) = 2$.

Veröffentlichung am 13. Dezember 2016.

Abzugeben bis 21. Dezember 2016.