R. Käppeli
L. Herrmann
W. Wu

Herbstsemester 2016

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 14

Aufgabe 14.1

14.1a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

(i) $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, **(ii)** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(iii) $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Tipp: Für (iii): Das Polynom $-x^3 + 6x^2 - 32$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = -2$.

Lösung: (i) $\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow\ \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. Die algebraische Vielfachheit ist also jeweils 1.
Löse das LGS $(A - \lambda_i I_2)\boldsymbol{v} = 0$ für $i = 1, 2$:
$\underline{\lambda_1 = 3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow\ v_1 = 2v_2$, v_2 freier Parameter

$\Rightarrow\ E_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1.

$\underline{\lambda_2 = -2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1/2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow\ x = y$, y freier Parameter

$\Rightarrow\ E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1.

(ii) Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 5 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\ \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 0 + 0$$

$$= -\ (\lambda+3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -3.$$

Suche nun die Nullstellen von $\lambda^2 - 4\lambda + 5$. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Die algebraische Vielfachheit ist auch jeweils 1. Die geometrische Vielfachheit ist bei all diesen Eigenwerten auch 1, weil sie nach dem Satz aus der Vorlesung mindestens 1 ist und kleiner gleich die algebraische Vielfachheit ist. Für die Eigenräume bekommen wir:

$\underline{\lambda_1 = -3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-5/2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_3 \text{ frei}, v_2 = \frac{v_3}{2},\ v_1 = -v_3$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 2 + i}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \text{-5-i} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-i & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (2/(5+i)) \\ (5/(5+i)) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 \end{array}\right) (2/(i-1))$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow v_3 \text{ frei}, v_2 = \frac{1+i}{2} v_3,\ v_1 = 0 \Rightarrow E_{2+i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2 - i}$: Wir haben gerade gezeigt, dass $A\boldsymbol{v} = (2+i)\boldsymbol{v}$ für $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt. Durch komponentenweise komplexe Konjugation dieser Gleichung erhalten wir $A\overline{\boldsymbol{v}} = (2-i)\overline{\boldsymbol{v}}$ für $\overline{\boldsymbol{v}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit gilt $E_{2-i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

(iii) Entwicklung der Determinante nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_3) &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & -5 & -5 \\ -2 & 9-\lambda & 5 \\ 1 & -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 9-\lambda & 5 \end{pmatrix} - (-6)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 9-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Durch den Hinweis, wissen wir eine Nullstelle $\lambda_1 = -2$. Polynomdivision liefert nun

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16) = -(\lambda+2)(\lambda-4)^2.$$

Somit hat C die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

$\underline{\lambda_1 = -2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 11 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (2) \\ (-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\ v_3 \text{ frei}, v_2 = 5v_3,\ v_1 = 30v_3 \ \Rightarrow\ E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1.

$\underline{\lambda_2 = 4}$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (5) \\ (2) \\ \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -35 & -35 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-5) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ v_3 \text{ frei}, v_2 = -v_3,\ v_1 = 0 \ \Rightarrow\ E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1 (kleiner als die algebraische Vielfachheit 2).

14.1b) Verwenden Sie MATLAB, um die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren in 14.1a) zu verifizieren. Zudem benutzen Sie MATLAB, um Diagonalmatrizen D_A, D_B, D_C und reguläre Matrizen T_A, T_B, T_C zu finden, sodass $A = T_A D_A T_A^{-1}$, $A = T_B D_B T_B^{-1}$ und $C = T_C D_C T_C^{-1}$. Existieren diese Matrizen in jedem Fall?

Lösung:

```
A=[8,-10;5,-7];
[TA,DA]=eig(A)

B=[-3,0,0;2,3,-1;5,2,1];
[TB,DB]=eig(B)

C=[-1,-5,-5;-2,9,5;1,-6,-2];
[TC,DC]=eig(C)
```

Der Output ist:

`TA` =

0.8944 0.7071

0.4472 0.7071

DA =

3 0

0 -2

TB =

0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.6667 + 0.0000i

0.4082 + 0.4082i 0.4082 - 0.4082i -0.3333 + 0.0000i

0.8165 + 0.0000i 0.8165 + 0.0000i -0.6667 + 0.0000i

DB =

2.0000 + 1.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i 2.0000 - 1.0000i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i -3.0000 + 0.0000i

TC =

-0.9859 + 0.0000i -0.0000 - 0.0000i -0.0000 + 0.0000i

-0.1643 + 0.0000i 0.7071 + 0.0000i 0.7071 + 0.0000i

-0.0329 + 0.0000i -0.7071 + 0.0000i -0.7071 - 0.0000i

DC =

-2.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i 4.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 4.0000 - 0.0000i

Wir sehen hier wieder, dass für C die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 4 nur 1 ist. Das heisst, es gibt keine Matrix T_C, sodass $C = T_C D_C T_C^{-1}$, wobei C_D diagonal ist.

Aufgabe 14.2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14.2a) Bestimmen Sie Matrizen T und D, für die gilt

$$T^{-1}AT = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist.

Lösung: Wir betrachten das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(3-\lambda) - (2-\lambda)2 = (2-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

Die Gleichung $0 = (2-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2)$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$. Dies sieht man über die Loesungsformel für quadratische Gleichungen:

$$\lambda_{1,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Wir berechnen den Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Das heisst, wir betrachten das homogene LGS $(A - I_3)\boldsymbol{v}_1 = 0$. Dies lösen wir mit dem Gauss Verfahren[1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-1) \;\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-1) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das heisst der Eigenvektor ist $\boldsymbol{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 2$ lösen wir das homogene LGS $(A - 2I_3)\boldsymbol{v}_2 = 0$. Ausgeschrieben:

$$0 = (A - 2I_3)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2.$$

Man sieht leicht, dass $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.

Für den dritten Eigenwert $\lambda_3 = 4$ wenden wir das Gauss Verfahren an um das homogene LGS $(A - 4I_3)\boldsymbol{v}_3 = 0$ zu lösen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} (-1/2) \;\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} (-2) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix T beschreibt den Basiswechsel von der Basis der Eigenvektoren $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ in die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Die Matrix T ist daher $T = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Durch den Basiswechsel in die Basis der Eigenvektoren wird die Abbildung der Matrix A, welche bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ gegeben war, eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Wir bemerken, dass die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ linear unabhängig sind, da sie Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind. Daher bilden sie eine Basis und die Matrix T ist invertierbar.

14.2b) Kann T als orthogonal gewählt werden? Wenn ja, geben Sie ein solches T an.

Lösung: Da die Matrix A symmetrisch ist, existieren 3 reelle Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren. Die Eigenräume von unterschiedlichen Eigenwerten stehen orthogonal zu einander. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ orthogonal. Wir nomieren diese und erhalten eine orthogonale

[1]Da die rechte Seite stets 0, lassen wir diese in dem LGS in Matrixschreibweise im Weiteren weg.

Matrix als Abbildungsmatrix des Basiswechsel $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist orthogonal und $T^{-1} = T^\top$.

Aufgabe 14.3

14.3a) Zu den Zeiten $t_i,\ i = 1, \dots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Wir setzen die unbekannte Funktion $f(t)$ als Linearkombination an der bekannten Funktionen $\phi_j(t),\ j = 1, \dots, 4$, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t},\ \phi_2(t) = \frac{1}{t^2},\ \phi_3(t) = e^{-(t-1)},\ \phi_4(t) = e^{-2(t-1)},\ \text{also } f(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \phi_j(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten γ_j der Linearkombination so, dass

$$\sum_{i=1}^{10} [f(t_i) - f_i]^2 \qquad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB. Bilden Sie die Gauss'schen Normalgleichungen, und lösen Sie diese mit der LR–Zerlegung, d.h. durch Linksdivision.

Lösung:

$f(t_i) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \phi_j(t_i)$, wobei $\phi_1(t) = \frac{1}{t}$, $\phi_2(t) = \frac{1}{t^2}$, $\phi_3(t) = e^{-(t-1)}$, $\phi_4(t) = e^{-2(t-1)}$.

Ziel: minimiere $\left\| \begin{bmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{10}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix} \right\|_2$.

Fehlergleichung: $Ax - \mathbf{f} = \mathbf{r}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & \frac{1}{t_1^2} & e^{-(t_1-1)} & e^{-2(t_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{t_{10}} & \frac{1}{t_{10}^2} & e^{-(t_{10}-1)} & e^{-2(t_{10}-1)} \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}}_{=:x} - \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{f}} = \mathbf{r}$$

Löse die Normalgleichungen $A^\top A x = A^\top \mathbf{f}$ mit MATLAB:

```
format long;
clear A
t=[0.1:0.1:1]'; f=[100 34 17 12 9 6 5 4 4 2]';
A=[1./t 1./t.^2 exp(-(t-1)) exp(-2*(t-1))];
x = (A'*A)\(A'*f)

ft = @(tx) x(1)./tx + x(2)./(tx.*tx) + x(3).*exp(-(tx-1)) +
    x(4).*exp(-2.*(tx-1));
```

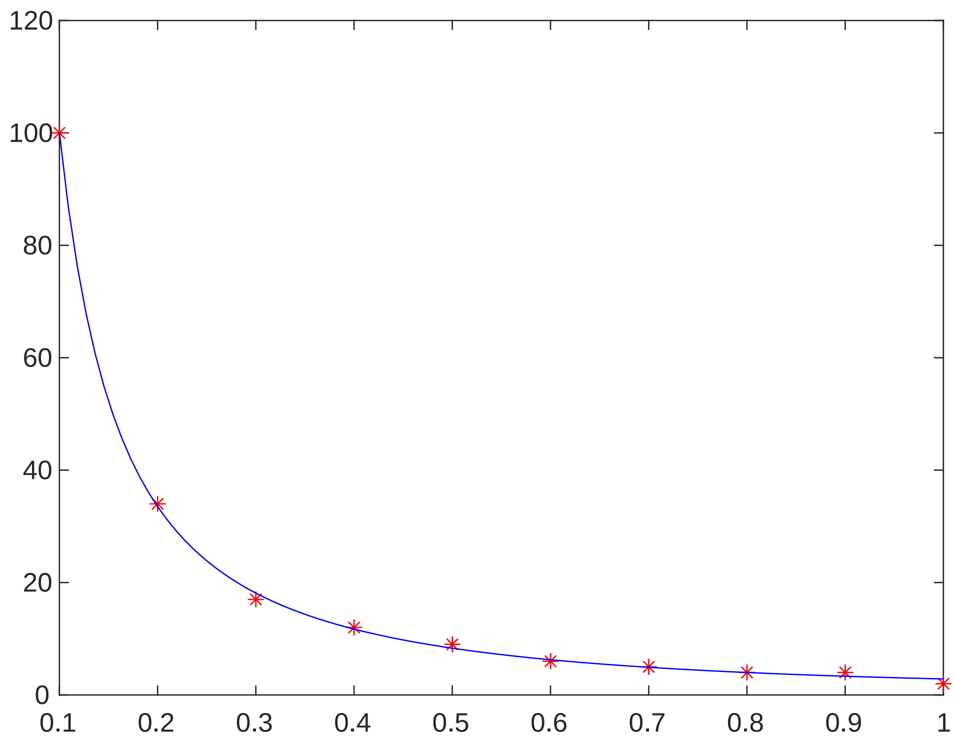

Abbildung 14.1: Fitting Plot

```
finert=linspace(0.1,1);
y0 = ft(finert);

plot(t,f,'r*',finert,y0,'b');
```

Dies ergibt die Lösung:

```
x =
   4.059115646965286
   0.614035171352460
  -2.531459328992872
   0.705759979941016
```

Veröffentlichung am 20. Dezember 2016.
Abzugeben bis ; keine Abgabe.