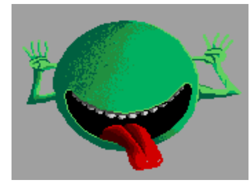
ETHZ, BSc RW/CSE

Prüfung

Numerische Mathematik für RW

WS 06/07

Prof. R. Hiptmair, G. Widmer



Dont't panic !

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- MATLAB, Vorlesungsunterlagen auf dem Rechner.
- Bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite beginnen und jedes Blatt mit Namen und Aufgabennummer deutlich beschriften.
- Bitte jede MATLAB-Programmdatei in der ersten Zeile mit einem Kommentar versehenen, der Namen und (Teil)Aufgabennummer enthält, Bsp:
  `% Hans Muster, Aufgabe 3f)`
- Alle Matlab-Files im home-Verzeichnis speichern- keine Unterverzeichnisse anlegen!
- Ausdrucken der MATLAB-Programme während der Prüfung oder am Prüfungsende mit dem Skript
  print_m_files.bsh
  (Fasst alle *.m -Files im aktuellen Verzeichnis im File m_file_summary zusammen und schickt dieses an den Drucker.)
- Nicht durch Hardwareversagen entstandener Datenverlust ist vom Prüfungskandidaten zu verantworten.

Viel Glück!

— • —

1. (4 Punkte)
   Gegeben sind die MATLAB-Routinen

```
function y = f1(x)
 y=1-cos(x);
```

```
function y=f2(x)
 y=2*sin(x/2).^2;
```

   a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen analytisch identisch sind, indem Sie die Definitionen $\sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-xi})$ und $\cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ verwenden.
   b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das beide Funktionen aufruft und ihre Ausgaben für kleine Werte $0 \leq x \leq 3 \cdot 10^{-8}$ so plottet, dass klar ersichtlich ist, dass sich die beiden Kurven unterscheiden. Ergänzen Sie den Plot durch eine aussagekräftige Legende.

c) Erklären Sie, warum sich die beiden numerischen Implementierungen der nach Teilaufgabe a) identischen Funktion so deutlich unterscheiden. Welche Funktion von beiden wird wohl den genaueren Wert liefern?

2. (4 Punkte)
Betrachten Sie für ein festes Intervall $[a, b]$ die Abbildung

$$I : \begin{cases} C^0([a,b]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g(x) & \mapsto & \int_a^b g(x)\,dx. \end{cases}$$

Leiten Sie die absolute Konditionszahl von I bezüglich der Supremumsnorm $||\cdot||_{L^\infty}$ auf $C^0([a,b])$ und der Betragsnorm $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ her.

3. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, dass folgendes gilt:

$$Rang(\boldsymbol{X}) = q \leq n,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n,n} \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n,q} \text{ mit } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T.$$

b) Implementieren Sie eine effiziente MATLAB-Funktion

```
function [U,Sigma,V] = prodsvd(A,B),
```

die für zwei Matrizen $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, für die $k \ll n$ gilt, die sparsame Singulärwertzerlegung (Skript S. 253) von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ berechnet, das heisst, die Matrizen $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{V}$ mit

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T, \quad \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n,k} \text{ orthonormale Spalten, } \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k,k} \text{ diagonal.}$$

Wie gross ist der asymptotische Rechenaufwand der einzelnen Schritte und des gesamten Algorithmus für festes kleines k in Abhängigkeit von n?

c) Gegeben seien die Matrizen $\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{B}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{B}_y \in \mathbb{R}^{n,q}$. Man definiert

$$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{B}_x^T\ , \quad \boldsymbol{Y} := \boldsymbol{A}_y\boldsymbol{B}_y^T \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Schreiben Sie unter Verwendung der Routine aus b) eine effiziente MATLAB-Routine

```
function [Az,Bz] = rank_q_approx(Ax,Ay,Bx,By),
```

welche eine Zerlegung einer Matrix $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A_z}\boldsymbol{B_z}^T$, $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\boldsymbol{A_z},\ \boldsymbol{B_z} \in \mathbb{R}^{n,q}$ berechnet, die erfüllt

$$\boldsymbol{Z} = \arg \min_{\substack{\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n,n} \\ Rang(\boldsymbol{M}) \leq q}} ||\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{M}||_F\ ,$$

wobei $||.||_F$ die Frobeniusnorm einer Matrix bezeichnet.
(Hinweis: Schreiben Sie $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ als Produkt zweier Matrizen und berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus b) die Singulärwertzerlegung von $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$.)

4. (16 Punkte)
Numerisch zu berechnen ist das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx, \tag{1}$$

für eine glatte Funktion f.

a) Werten Sie das Integral für $f(x) := e^x$ mit Gaussquadratur aus. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Rate α der algebraischen Konvergenz in Bezug auf die Anzahl n der Quadraturknoten approximativ bestimmt.

(Benutzen Sie die auf dem Rechner zur Verfügung gestellte Routine `Gauss_Quad`, welche die Gausspunkte und -gewichte auf dem Intervall $[-1,\ 1]$ liefert.)

Hinweis: "Exakter" Integralwert $= 1.775499689212181$.

b) Der Integrand in (1) hat Singularitäten der Ableitung in $x = \pm 1$. Transformieren Sie das Integral durch Substitutionen so, dass die Singularitäten verschwinden.

(Hinweis: Verwenden Sie, dass $1 - x^2 = (1 + x)(x - 1)$.)

c) Werten Sie das transformierte Integral für $f(x) = e^x$ wiederum durch Gaussquadratur aus. Stellen Sie den Quadraturfehler in Abhängigkeit von n in einem Plot mit geeignetem Massstab da. Schreiben Sie dazu ein MATLAB-Programm. Welche Art der Konvergenz liegt nun vor?

5. (8 Punkte)
Gegeben sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$.

a) Betimmen Sie die beiden Zahlen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||_2 \rightarrow \min$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ tridiagonal }.$$

Implementieren Sie dazu eine effiziente MATLAB Routine

```
function [alpha, beta]= Least_Squares(x,b).
```

b) Implementieren Sie eine MATLAB-Routine

```
function Least_Squares_example(),
```

welche die obige Routine für

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [0.1,\ 0.75,\ 3,\ 4.1,\ 5,\ 4.9]' \\ \boldsymbol{b} &= [0.3,\ 1.54,\ 2.8,\ 4.6,\ 3.7,\ 2]' \end{aligned}$$

ausführt.

6. (12 Punkte)
Eine Kurve $\mathcal{C}$ in der Ebene lässt sich als Niveaulinie einer stetigen Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

beschreiben

$$\mathcal{C} := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ F(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}.$$

Falls F stetig differenzierbar ist, können zusammenhängende Teile der Kurve als Lösungskurve zu Anfangswertproblemen

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \frac{\mathbf{grad}F(\boldsymbol{y}(t))^{\perp}}{||\mathbf{grad}F(\boldsymbol{y}(t))||}, \ F(\boldsymbol{y}(0)) = 0, \tag{2}$$

erhalten werden. Dabei bezeichnet $^{\perp}$ die Rotation eines Vektors $\in \mathbb{R}^2$ um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn, also $\binom{x}{y}^{\perp} = \binom{-y}{x}$. **grad** steht für den Gradienten einer Funktion, $\mathbf{grad}F(x, y) := (\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y))^T$.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `draweggcurve()` , die ein solches Anfangswerproblem löst, und die Kurve

$$\left\{ \boldsymbol{x} = (x, y) \ \in \mathbb{R}^2 : F(\boldsymbol{x}) := (x^2 + y^2)^2 - x^3 - y^3 = 0 \right\}$$

durch $(0, 1.2)$ plottet. Lösen Sie dazu das entsprechende Anfangswertproblem (2) auf dem Zeitintervall $[0, 6]$ und verwenden Sie die MATLAB-Funktion `ode45` mit folgenden Paramentern:

```
options = odeset('reltol',1e-5,'abstol',1e-5); .
```

Beschriften Sie die beiden Achsen des Plots.