Serie 10

1. (Trapezregel) Wir betrachten das Integral

$$I_a^b[f] := \int_a^b f(x)\,dx = I_a^b[f](0).$$

Dabei sind $I_a^b[f]$ bzw. $I_a^b[f](h)$ gelegentlich gebrauchte Bezeichnungen für das Integral resp. seine Trapezsumme mit Schritt h.
Es seien nun $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3$ gegeben.

a) Berechnen Sie mit symbolischer Rechnung die Trapezsumme $I_0^1[x^3](h)$ mit äquidistanten Teilintervallen $h = \frac{1}{n}$. Verwenden Sie dazu die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

b) Wie lautet das Fehlergesetz? Bestimmen Sie die Ordung m mit der Eigenschaft, dass $I_0^1[x^3](h) - I_0^1[x^3] = \mathcal{O}(h^m)$ gilt.

c) Wieviele Teilintervalle sind für 10–stellige Genauigkeit etwa erforderlich?

2. Für analytische Integranden f hat die Trapezregel zwei wichtige Spezialfälle mit exponentieller Konvergenz, d.h. $I_a^b[f](h) - I_a^b[f](0) = \mathcal{O}(e^{-\gamma/h})$, $\gamma > 0$:

- f reell–analytisch, Integration über ganz $\mathbb{R}$, d.h. von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei muss das uneigentliche Integral existieren, siehe Aufgabe 3.
- f periodisch, Integration über eine oder mehrere volle Perioden.

Wir betrachten als Beispiel das Integral

$$U = I_0^{2\pi}[f] = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right) - \frac{1}{2}\left(A^2 - B^2\right)\cos(\varphi)}\, d\varphi\ ,$$

welches den Umfang U einer Ellipse mit Halbachsen A und B berechnet (ein Spezialfall eines sogenannten *elliptischen Integrals*).
Approximieren Sie U im Fall $A = 2$, $B = 1$ durch die Trapezsummen mit Schrittweiten $h_1 = 2\pi/6$ und $h_2 = h_1/2$ mit MATLAB. Wieviele Dezimalen von $I_0^{2\pi}[f](h_2)$ sind etwa korrekt?

3. Bringen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Substitutionen $x = \varphi(t)$ auf die Form $I = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt$ mit beidseitig mindestens exponentiell abklingendem F:

Bitte wenden!

a) $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi J_0(1), \quad \varphi(t) = \tanh(t),$

b) $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^5}\,dx = \frac{\pi/5}{\sin(\pi/5)}, \quad \varphi(t) = \exp(t),$

c) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi, \quad \varphi(t) = \sinh(t).$

Bemerkung: Bei Aufgabenteil a) bezeichnet J_0 die nullte Besselfunktion, `besselj(0,1)` in Matlab. Hier hat die Substitution den (höchst erwünschten) Effekt, die Randsingularitäten ins Unendliche zu werfen.
Fakultativ: Berechnen Sie in einigen der obigen Fällen die Trapezsumme

$$T(h) := h \sum_{|F(k,h)| \geq \epsilon} F(k,h)$$

und plotten Sie

$$-\log\left(|T(h) - I|\right) / \log(10)$$

gegen $r := \dfrac{1}{h}$ in einem geeigneten Intervall. Was kann man aus dem Plot ablesen?

4. (**PA:** Schiessmethode)

Lösen Sie das Zweipunkt-Randwertproblem

$$\begin{aligned} y'' &= -y - (y')^2 + x/2, \qquad 0 \leq x \leq 5 \\ y(0) &= y_0 = 0 \\ y(5) &= y_f = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

mit der Schiessmethode unter Verwendung des Integrators `ode45` von MATLAB und der Sekantenmethode.

a) Sei y_η die Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} y_\eta'' &= -y_\eta - (y_\eta')^2 + x/2, \qquad 0 \leq x \leq 5 \\ y_\eta(0) &= y_0 \\ y_\eta'(0) &= \eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Schreiben Sie (2) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnuung um. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function yend = awp(eta)`, welche `yend` $\approx y_\eta(5)$ mit den Default-Toleranz $\mathit{reltol} = 10^{-3}$, $\mathit{abstol} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit vom Anfangswert η berechnet. Gehen Sie dazu gleich wie in Aufgabe 3 der Serie 9 vor.

b) Suchen Sie die Nullstelle η^* der Funktion $F(\eta) := y_\eta(5) - y_f$ mithilfe des Sekantenverfahrens. Es ist nicht nötig, für F eine eigene `function` zu schreiben; der Endwert y_f kann direkt in das Sekanten-Verfahren eingebracht werden. Startwerte z.B. $\eta_0 = 3.7$ und $\eta_1 = 3.8$. Plotten Sie schliesslich $y_{\eta^*}(x)$.