Serie 11

1. (Inverse Interpolation) Das Problem der Nullstellensuche in einem Intervall I einer (in I streng monotonen) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(x)$ kann umformuliert werden in das Problem der Auswertung der Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ von f an der Stelle 0:

$$f(\xi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = g(0) \quad \text{mit} \quad g = f^{-1}.$$

Diese Auswertung kann man approximativ durch das Auswerten des Interpolationspolynoms von g an der Stelle 0 erreichen. Gesucht werde eine Näherung für die Nullstelle $\xi \in I = [1.3, 1.6]$ von $f(x) = \sinh(x) - 2$. Gegeben seien die Punkte $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k))$ mit $x_k = 1.3, 1.4, 1.5, 1.6$. Berechnen Sie eine Approximation für $\xi = g(0)$ mit obiger Strategie und vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Lösung.
Bemerkung: Diese Strategie kann auch angewendet werden, wenn die Funkion nur tabellarisch bekannt ist.

2. (Extremalstelle ohne Ableitung) Die differenzierbare Funktion $y = f(x)$ sei in der Nähe einer Extremalstelle überall auswertbar.

a) Interpolieren Sie f quadratisch mit dem Lagrangepolynom in drei wählbaren, in der Nähe der Extremalstelle liegenden Wertepaaren $(x_k, y_k), k = 1, 2, 3$. Hierbei sind die x_k verschieden aber nicht notwendigerweise äquidistant. Weiter ist $(y_1 - y_0)(y_2 - y_1) < 0$ wünschenswert aber nicht notwendig. Berechnen Sie die Extremalstelle x_m des interpolierenden Polynoms und das entsprechende y_m.

b) Definieren Sie aufgrund von Aufgabenteil a) ein iteratives Verfahren zur Berechnung von Extremalstellen von f ohne Verwendung von f'. Das Verfahren soll analog zur Sekantenmethode jeweils mit den drei neusten Wertepaaren den Iterationsprozess fortführen.

3. (**PA**) Die Qualität eines Interpolationspolynoms $p_n(x)$ hängt sehr stark von der Wahl der Stützstellen x_k ab: vor allem an den Intervallenden zeigen äquidistante

Bitte wenden!

Stützstellen unerwünschte Eigenschaften (Oszillationen) bei vielen Datenpaaren. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad -a \le x \le a, \quad a > 0.$$

Plotten Sie jeweils die $n+1$ Datenpunkte $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$, das Interpolationspolynom $p_n(x)$ vom Grad n, sowie die Funktion $f(x)$ in dieselbe Figur (Funktionen `polyfit` und `polyval`). Wählen Sie $a = 5$, $n = 4, 6, 10$ und

a) $x_k = -a + 2ka/n$ (äquidistant) und

b) $x_k = a\cos\left(\frac{(k+1/2)\pi}{n+1}\right)$ (Tschebyscheff–Punkte) für $k = 0, \ldots, n$.

4. (**PA**)

Gegeben seien die Datenpunkte (X_k, Y_k), $k = 1, \ldots, 16$:

X_k	45	20	20	45	33	54	89	70	58	80	77	101	109	101	88	120
Y_k	39	30	14	39	15	24	63	43	14	36	32	37	33	37	17	25

Diese Punkte sollen durch eine parametrische Splinekurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ verbunden werden. Wählen Sie dazu den Parameter t als die Bogenlänge auf dem die Datenpunkte verbindenden Polygonzug. Der Einfachheit halber verwende man natürliche Splines für $x(t)$ und $y(t)$. Das Programm

```
function f=myspline(tt,ff,t)
l=length(tt); h=diff(tt); r=1./h; df=diff(ff); c=df.*(r.^2);
A=diag([0;2*r]+[2*r;0])+diag(r,-1)+diag(r,1);
b=[0;3*c]+[3*c;0]; f1=A\b;
c0=df-h.*f1(1:l-1); c1=h.*f1(2:l)-df; d0=c1-c0;
ind=[];
for k=1:l-1, ii=find(tt(k)<=t & t<tt(k+1)); ind=[ind;k+0*ii]; end;
tau=r(ind).*(t-tt(ind));
f=ff(ind)+(df(ind)+(c0(ind)+d0(ind).*tau).*(tau-1)).*tau;
```

mit dem Aufruf

```
tt=[...]; ff=[...]; % data as column vectors
t=[...];            % evaluation points as column vector
f=myspline(tt,ff,t); plot(tt,ff,'*',t,f);
```

erzeugt und plottet den natürlichen Spline für den Datensatz `tt, ff` an den Punkten `t`. Um die gewünschte parametrische Splinekurve zu erzeugen, reichen die Anweisungen

Siehe nächstes Blatt!

```
xx=[...]; yy=[...]; % data as columns
h=2;                % step
tt=[0;cumsum(sqrt(diff(xx).^2+diff(yy).^2))]; t=[0:h:tt(length(tt))]';
x=myspline(tt,xx,t); y=myspline(tt,yy,t);
```

a) Versuchen Sie, das Programm zu verstehen. Erklären Sie insbesondere die Wahl der Parameter, die mögliche Verwendung des Programms, sowie allfällige Einschränkungen.

b) Erzeugen und plotten Sie die parametrische Splinekurve zu obigem Datensatz.

5. Kommt es bei der Auswertung folgender Ausdrücke f zu Auslöschung? Geben Sie, falls nötig, Ersatzausdrücke an.

a) $f = \sqrt{2400} - 49,$

b) $f = 1 - \sum_{k=1}^{20} 2^{-k},$

c) $f = \frac{144}{89} - \frac{\sqrt{5}-1}{2},$

d) $f = \log(1+x),\ x \to 0,$

e) $f = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ x \to 0,$

f) $f = \frac{x-\sin(x)}{x^3},\ x \to 0.$

Abgabe: Keine! Diese Serie ist freiwillig — die Themen gehören aber zum Prüfungsstoff!
Ferienpräsenz: 12.8.–28.8.: Di/Do; 1.9.–19.9.: Mo–Fr; 23.9./25.9.: Di/Do
jeweils 09:30–11:00 im Vorraum HG G53.