D-ITET Numerische Methoden SS 2003
Prof. Dr. J. Waldvogel

Serie 2

1. Ausgehend von den beiden Startwerten x_0, x_1 löse man mittels Sekantenmethode die Gleichung $f(x) := x^2 - a = 0$ ($a > 0$ gegeben).

a) Wie lautet die allgemeine Iterationsvorschrift (x_{k+1} ausgedrückt durch x_k und x_{k-1})?

b) Wählen Sie als Mass für den relativen Fehler von x_k die Grösse

$$e_k := \frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

und drücken Sie e_{k+1} durch e_k und e_{k-1} aus.

c) Lösen Sie die Fehlerrekursion aus b) durch den Ansatz $e_k = (e_{k-1})^\varphi$, $k = 1, 2, \ldots$. Bestimmen Sie φ.

Bemerkung: Aufgrund von b) lässt sich einfach zeigen, dass die Iteration für beliebige Startwerte $x_0 > 0$, $x_1 > 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

2. Der zeitliche Verlauf der Planetenbewegung (Keplerbewegung) wird durch die Keplersche Gleichung

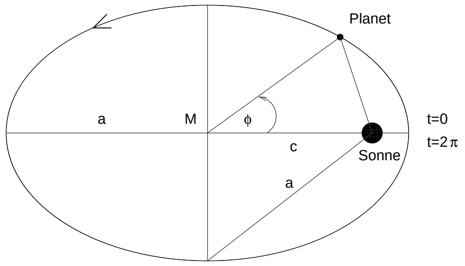
$$t = \varphi - e \sin(\varphi)$$

beschrieben. Dabei bedeuten:

φ die "exzentrische Anomalie", d.h. der Polarwinkel bezüglich des Mittelpunktes M der Bahnellipse (siehe Figur),

e die Exzentrizität der Bahnellipse, $e = c/a$ mit $0 \leq e \leq 1$,

t die Zeit, gemessen in Einheiten $Umlaufszeit/2\pi$, d.h. 1 Umlauf braucht 2π Zeiteinheiten.



Bitte wenden!

In dieser Aufgabe soll für gegebenes t der Winkel φ mit Newtoniteration gefunden werden. Geben Sie die Newtoniterationsformel zur Lösung der Keplerschen Gleichung an. Sie brauchen die Formel nicht aufzulösen.

3. (**Programmier–Aufgabe**) Drei Ellipsoide oder Kugeln seien durch ihre Koordinatengleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\
\frac{(x-1/2)^2}{3} + y^2 + xz + 3z^2 &= 1, \\
\frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}xy + 3\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - yz + 2z^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Berechnen Sie Schnittpunkte der drei Flächen mittels eines Quasi-Newton-Verfahrens, ausgehend von geeigneten Startnäherungen.
Dabei soll die Jacobimatrix (ausnahmsweise) mit zentralen Differenzen-Quotienten

$$\frac{1}{2h}\left(\vec{F}(\vec{x} + h\vec{e_i}) - \vec{F}(\vec{x} - h\vec{e_i})\right)$$

"approximiert" werden.
Es gibt 8 reelle Schnittpunkte. Bestimmen Sie einige davon mit MATLAB auf volle Genauigkeit.
Programmierungshinweise:

a) Bringen Sie das Gleichungssystem (1) in die Form

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0, \\ f_3(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

b) Führen Sie den Vektor $v = (x,y,z)^T$ ein, und schreiben Sie eine MATLAB-Prozedur $function\, ff = f(v)$, welche den Kolonnenvektor

$$ff = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))^T$$

berechnet.

c) Geben Sie die Quasi-Newtoniteration an, wobei die Jacobimatrix J durch zentrale Differenzen mit Schnitt $h = 1/2$ angenähert wird. Verwenden Sie dazu lediglich die $function\, ff = f(v)$.